ӘОК 530.1

(1+1)-ӨЛШЕМДІ СОЛИТОНДЫҚ БЕТТЕРДІ ВАРИАЦИЯЛЫҚ ЖОЛМЕН АЛУ ТУРАЛЫ

Конисбекова Камшат Нурманкизи[1]**, Серикбаев Нуржан Сагындыкович**[2]
kamsatkonysbekova@gmail.com
[1]Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ Физика-техникалық факультет, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
[2] «Р. Мырзақұлов атындағы Еуразия халықаралық теориялық физика орталығы» ЖШС, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі- Нугманова Г.Н

Үш өлшемді Евклид кеңістігіндегі беттік теория ғылымның әртүрлі салаларында, әсіресе математикада (дифференциалды геометрия, топология, дербес дифференциалдық теңдеулер (ДДТ), теориялық физикада (жолдар теориясы, жалпы салыстырмалық теориясы) және биологияда кеңінен қолданылады [1] - [5]. Жоғарыда аталған ғылым салаларында пайда болатын 2-беттердің бірнеше арнайы сыныптары бар. Үш өлшемді эвклид кеңістігіндегі беттерді жіктеу үшін Гаусс пен орташа қисықтыққа ерекше жағдайлар қойылады. Бұл шарттар кейде қисықтық арасындағы алгебралық қатынас ретінде, ал кейде осы екі қисықтық үшін дифференциалдық теңдеу түрінде беріледі.Жоғарыда айтып өткен ғылым салаларындағы 2-беттердің ішкі кластарының мысалдары мынадай:Ең төменгі беті(минималды беттер): $H = 0$,

- Тұрақты орташа қисықтығы бар беттер : $H = const$,
- Тұрақты оң Гаусс қисықтығы бар беттер: $K = const > 0$,
- Тұрақты теріс Гаусс қисығы бар беттер :$K = const < 0$,
- Гармоникалық кері қисығы бар беттер : ∇^2 (1/H)=0,
- Бианки беттері: : $\nabla^2\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right) = 0$ және $\nabla^2\left(\frac{1}{\sqrt{-K}}\right) = 0$, оң Гаусс қисықтығы және теріс Гаусс қисықтығы үшін;
- Вайнгартен Беті: $f(H, K) = 0$. Мысалы, Вайнгартеннің сызықты беттері $c_1 H + c_2 K = c_3$, және Вайнгартеннің квадраттық беттері,$c_4 H^2 + c_5 HK + c_6 K^2 + c_7 H + c_8 K = c_9$, мұндағы c_i-тұрақтылар ,i=1,2,...9
- Уиллмор беті: $\nabla^2 H + 2H(H^2 - K) = 0$;
- Липидті мембрана пішінінің теңдеуін шешетін беттер:$p - 2wH + K_c \nabla^2(2H) + K_c(2H + c_0)(2H^2 - 6H - 2K) = 0$, мұндағы p, ω, k_c және c_0-тұрақтылар. Мұнда H және K-беттің орташа және Гаусс қисықтығы, ал ω, k_c, k_0, ∇^2 кейінірек анықталды.

19-20 ғасырларда көптеген ғалымдар бұл беттерді зерттеді. Бұл беттердің әрқайсысы әртүрлі жағдайда маңызды. Зерттеудің негізгі мақсаты - кейінірек анықталатын жалпыланған теңдеуін шешетін беттерді табу.

Жеткілікті тегіс беттер үшін бірінші және екінші фундаментальды формалардың коэффициенттері Гаусс-Минарди-Кодацци (ГМК) теңдеулері деп аталатын сызықтық ДДТ жүйесін қанағаттандырады. ГМК теңдеулері-қозғалмалы жақтауларға арналған Гаусс-Вайнгартен (ГВ) теңдеулері деп аталатын сызықтық теңдеулер жұбының сәйкестік шарттары. Осылайша, дифференциалдық геометриядан біз сызықтық теңдеулер жұбын және оның сәйкестік шартын, яғни сызықты емес ФДЭ жүйесін аламыз. Бұл идея Гаусcқа белгілі болған. Кейбір жағдайларда бұл теңдеулер жалғыз теңдеуге келтіріледі. Кейбір белгілі мысалдар - псевдо-сфералық беттер үшін синус-гордон теңдеулері және орташа қисықтық тұрақты беттер үшін.

Солитон теңдеулері беттердің құрылысын шешуде рөл атқарады. Сызықтық емес солитондық теңдеулер теориясы 1960 жылдары жасалды. Бұл интегралданатын теңдеулердің шешімдерін табу үшін кері шашырау әдісін қолдану үшін интегралданатын теңдеулердің бос көрінісі болуы керек. Сызықтық емес ФДЭ-нің бос көрінісі екі сызықтық теңдеуден тұрады, олар Лакс теңдеулері деп аталады. Сызықтық емес ФДЭ-нің бос көрінісі екі сызықтық теңдеуден тұрады, олар Лакс теңдеулері деп аталады.

$$\Phi_x = U\Phi,\ \Phi_t = V\Phi \tag{1}$$

және олардың сәйкестік шарты

$$U_t - U_x + [U, V] = 0 \tag{2}$$

мұндағы x және t-тәуелсіз айнымалылар. Мұнда U және V Лакс жұбы деп аталады. Олар x және t айнымалыларынан тәуелсіз, сондай-ақ λ спектрлік параметріне байланысты. Біздің жағдайларымыз үшін U және V 2×2 матрицалар болып табылады және берілген Ли алгебрасында орналасқан . (2) теңдеуі нөлдік қисықтық шарты деп те аталады. ГМК теңдеулері ГВ теңдеулерінің сәйкестік шарттары болғандықтан, беттер мен Лакс теңдеулерінің арасында тығыз байланыс бар. ГВ теңдеулері мен Лакс теңдеулері ұқсас рөлдерді атқарады, бірақ олар бірдей емес. Лакс теңдеулері спектрлік параметрлерге тәуелді болса, ГВ теңдеулері тәуелді емес. Сонымен қатар ГВ теңдеулері 3 × 3 матрица түрінде жазылады, ал Лакс жұптары 2 × 2 матрицалар.

2-беттер мен интегралданатын теңдеулерді ГВ теңдеулері мен Лакс теңдеулерінің ұқсастығы бойынша байланыстыруға болады. Мұндай қатынас Ли топтары мен Ли алгебраларын қолдану арқылы орнатылады. Осы арақатынасты қолдана отырып, солитон беттерінің теориясын алғаш рет Сим жасаған. Ол беттік теорияны екі бағытта да зерттеді: геометриядан солитондарға және солитондардан геометрияға. Бірінші бағытта ол ГМК теңдеулерінің нәтижесінде белгілі солитон теңдеулерін алды. Екінші бағытта ол біріктірілген теңдеулер үшін Лакс теңдеулерінің деформациясын қолдана отырып, келесі формуланы алды.

$$F = \Phi^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} \tag{3}$$

бұл Ли алгебрасына иммерсиялар тобы (F) мен берілген Лакс жұптары үшін Лакс теңдеулерінің арасындағы қатынасты береді. Фокас пен Гель'фанд Сим формуласын осылай жалпылаған

$$F = \alpha_1\Phi^{-1}U\Phi + \alpha_2\Phi^{-1}V\Phi + \alpha_3\Phi^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} + \alpha_4 x\Phi^{-1}U\Phi + \alpha_5 t\Phi^{-1}V\Phi + \Phi^{-1}M\Phi \tag{4}$$

мұндағы α_i, i = 1, 2, 3, 4, 5 және M ∈ g - тұрақтылар. Сонымен, солитонның беттік техникасы деп аталатын бұл әдіс арқылы интегралданатын теңдеулердің және олардың Лакс теңдеулерінің симметрияларын қолдана отырып, берілген Лакс жұптары үшін солитон беттерінің үлкен класын таба аламыз. Солитонды беттік техникамен жасалған екі бетті табуға болады.

Екінші жағынан, берілген Лагранж функциясының еркін энергиясы үшін вариациялық принциптен туындайтын кейбір беттер де бар, бұл беттердің орташа қисаюында екіден кем немесе тең дәрежелі полином. Лагранж функциялары үшін форма теңдеуін шешетін минималды беттер, тұрақты орташа қисықтық беттері, Вайнгартеннің сызықты беттері, Уиллмор беттері және беттер осы типтегі мысалдар болып табылады. Беттің орташа және Гаусс қисықтықтарының жалпы Лагранж функциясын ала отырып, жалпыланған пішін теңдеуін шешетін жалпы беттерді табуға болатындығы

Біздегі мақаланың негізгі мақсаты - МкдВ, кдВ, Синус-Гордон теңдеулеріне арналған Лакс теңдеулерінің деформацияларын қолдана отырып, 2-беттің жаңа кластарын табу және жалпыланған теңдеуінің шешімдерін алу.

2. Вариациялық принциптен алынған беттер

1 және 2-беттерде (i) - (ix) берілген беттердің кейбір ішкі сыныптарына сәйкес ε үшін вариациялық принциптен алынуы мүмкін, олар:

- Минималды беттер:$\varepsilon = 0, p = 1$;
- Тұрақты орташа қисықтығы бар беттер:$\varepsilon = 1$;
- Вайнгартеннің сызықты беттері: : $\varepsilon = aH + b$, мұндағы a және b-тұрақты мәндер;
- Уиллмор беті:$\varepsilon = H^2$;
- Липидті мембрана пішінінің теңдеуін шешетін беттер: $\varepsilon = (H - c)^2$, мұндағы с-тұрақты;
- Жабық липидті қабатты теңдеу: $\varepsilon_{lb} = (k_c/2)(2H + c_0)^2 + \bar{k}K$, мұндағы k_c және $\bar{k}$ - серпімді тұрақтылар, ал c_0 - липидті қос қабаттың өздігінен қисаюы.

Қорытындылай келе , солитон беттерінің әдісін қолдана отырып Ли топтары мен Ли алгебраларында осы беттер мен беттер арасындағы қатынастар қолдандық. Ли SU(2) тобын және оның Ли su (2) Алгебрасын қолдана отырып, біз СГ және варияциалық принциптен алынған беттердің спектрлік деформациясын, Лакс жұптарын таптық.Біз интегралданатын сызықты емес теңдеулерді жартылай туындыларға шешу параметрлерін деформациялаудан тұратынын көрдік..Кейбір жаңа алгебралық MKdV жағдайында Вайнгартен мен Уиллмор беттері енгізілді. Осылай біз, Лакс теңдеулерін шешу, беттердің кейбірі тұрақты арнайы мәндері үшін алдық.

Бұл зерттеуді ҚР БҒМ қаржыландырды, IRN AP08857372.

Қолданылған әдебиетте тізімі

1. R. Parthasarthy and K. S. Viswanathan, Geometric properties of QCDstring from Willmore functional, J. Geom. Phys. 38, 207-216 (2001)
2. M. P. Do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, (1976).
3. L.P. Eisenhart, A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Sur-L.P. Eisenhart, A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces, Dover Pub., Inc., New York, (1909).
4. I. M. Mladenov, New Solutions of the Shape Equation, Eur. Phys. J. B 29,327-330 (2002).
5. R. Osserman, A Survey of Minimal Surfaces, Dover Pub., Inc., New York, (1986)
6. Z.C. Tu, Elastic Theory of Biomembranes, Thin Solid Films 393, 19-23 (2001).
7. Z.C. Tu and Z.C. Ou-Yang, A Geometric Theory on the Elasticity of Biomembranes, J. Phys. A: Math. Gen. 37, 11407-11429 (2004).
8. A. Sym, Soliton Surfaces, Lett. Nuovo Cimento 33, 394-400 (1982).
9. A.S. Fokas and I.M. Gelfand, Surfaces on Lie Groups, on Lie Algebras, and Their Integrability, Commun. Math. Phys. 177, 203-220 (1996).
10. J. Cieslinski, A Generalized Formula for Integrable Classes of Surfaces in Lie Algebraas,J. Math. Phys. 38, 4255-4272 (1997).