УДК 834

КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ОБОБЩЕНИЯМИ ГРАВИТАЦИИ ГАУССА-БОННЕ

Рахатов Даурен Жанатович
godauren@gmail.ru
Магистрант 1-курса специальности 7М05304 – Физика,
кафедра общей и теоретической физики,
ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – Цыба П.Ю.

Гравитация Гаусса-Бонне – это модифицированная модель действия Эйнштейна-Гилберта, содержащая в себе инвариант Гаусса-Бонне «G», или же функцию, зависящую от нее. Действие исследуемой модели содержит в себе компоненты электромагнитного, гравитационного, скалярного полей и имеет следующий вид

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}\left[\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + f(G) + \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)\right], \qquad (1)$$

где g – метрический тензор; $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ – тензоры электромагнитного поля; $f(G)$ – некоторая функция, зависящая от G; $V(\phi)$ – потенциал скалярного поля, G – инвариант Гаусса-Бонне

В качестве метрики пространства-времени используется метрика Фридмана-Робертсона-Уокера (в дальнейшем «ФРУ») с сигнатурой $(-,+,+,+)$. Все вычисления происходят в системе единиц: $8\pi G = \hbar = c = 1$

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)\,, \qquad (2)$$

где $a(t)$ – масштабный фактор Вселенной.

Инвариант Гаусса-Бонне [1] вычисляется при помощи формулы (3)

$$G = R_{iklm}R^{iklm} - 4R_{ik}R^{ik} + R^2, \qquad (3)$$

где $R_{iklm}R^{iklm}$ – тензоры Римана, $R_{ik}R^{ik}$ – тензоры Риччи, R – скалярная кривизна пространства. В случае метрики (2), выражение (3) преобразуется к виду

$$G = 24\frac{\ddot{a}\dot{a}^2}{a^3} = 24H^2(\dot{H} + H^2), \qquad (4)$$

где $H = \frac{\dot{a}}{a}$ – параметр Хаббла.

Формула для тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ выглядит следующим образом

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \qquad (5)$$

где $\partial_{\mu,} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \partial_{\nu,} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}$ соответственно, А – векторный потенциал. $A_\mu = (\Phi, A_1, A_2, A_3)$ [2]

Для тензора электромагнитного поля в данном случае будет использован анзац вида

$$A_\mu = \big(0, A_1(t), A_2(t), A_3(t)\big). \tag{6}$$

Тогда, исходя из (5) компоненты тензора электромагнитного поля вычисляются следующим образом

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= (F_{\mu\nu})^2 g^{\mu\mu} g^{\nu\nu} = -(\dot{A}_\mu)^2 a^{-2} = F_{\nu\mu}F^{\nu\mu} \\ F_{01}F^{01} &= (F_{01})^2 g^{00} g^{11} = -(\dot{A}_1)^2 a^{-2} = F_{10}F^{10}, \\ F_{02}F^{02} &= (F_{02})^2 g^{00} g^{22} = -(\dot{A}_2)^2 a^{-2} = F_{20}F^{20}, \\ F_{03}F^{03} &= (F_{03})^2 g^{00} g^{33} = -(\dot{A}_3)^2 a^{-2} = F_{30}F^{30}. \end{aligned} \tag{7}$$

Следовательно, инварианта электромагнитного поля будет иметь вид

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -a^{-2}\big[(\dot{A}_1)^2 + (\dot{A}_2)^2 + (\dot{A}_3)^2\big] \tag{8}$$

После подстановки найденных элементов, функция Лагранжа для действия (1), принимает следующий вид:

$$L = -\tfrac{a}{2}\big[(\dot{A}_1)^2 + (\dot{A}_2)^2 + (\dot{A}_3)^2\big] + a^3 f(G) + \tfrac{1}{2}a^3\dot{\phi}^2 - a^3 V(\phi) \tag{9}$$

Для нахождения уравнений движения, в данном случае, будет использоваться уравнение Эйлера-Пуассона (10), так как лагранжиан содержит компоненты с производными второго порядка.

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right) = 0 \tag{10}$$

Воспользовавшись уравнением (10) получаем уравнение Фридмана

$$3H^2 + 2\dot{H} = -p \tag{11}$$

$$p = \frac{1}{8H\dot{f}_G}\left[-\frac{1}{6a^2}\big[(\dot{A}_1)^2 + (\dot{A}_2)^2 + (\dot{A}_3)^2\big] + f - Gf_G + 8H^2\big(\ddot{f}_G - \dot{f}_G\big) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V\right]$$

Найдем уравнение Клейна-Гордона по формуле Эйлера-Лагранжа (12)

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -a^3 V_\varphi$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 3a^2\dot{a}\dot{\varphi} + a^3\ddot{\varphi}$$

Получено уравнение Клейна-Гордона

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V_\varphi = 0 \tag{13}$$

Следующим шагом будет нахождение уравнений Максвелла с применением уравнения (12). После вычислений получаем

$$H\dot{A}_1 + \ddot{A}_1 = 0, \tag{14}$$

$$H\dot{A}_2 + \ddot{A}_2 = 0, \tag{15}$$

$$H\dot{A}_3 + \ddot{A}_3 = 0, \tag{16}$$

где (14), (15), (16) – первое, второе и третье уравнения Максвелла соответственно.

Для нахождения плотности энергии воспользуемся условием «нулевой» энергии (17), но с модификацией для использования с производными второго порядка.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{a}}\dot{a} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{a}}\right)\dot{a} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{a}}\ddot{a} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\dot{\varphi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_1}\dot{A}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_2}\dot{A}_2 + \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_3}\dot{A}_3 - L = 0 \tag{17}$$

После вычислений получено второе уравнение Фридмана

$$3H^2 = \rho \tag{18}$$

$$\rho = \frac{1}{8H\dot{f}_G}\left(-\frac{1}{2a^2}\left[(\dot{A}_1)^2 + (\dot{A}_2)^2 + (\dot{A}_3)^2\right] - f + Gf_G + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V\right)$$

В данной статье для решения уравнений движения будет использоваться модель де Ситтера с масштабным фактором $a = e^{H_0 t}$, где H_0 – постоянная.

Также, векторные потенциалы электромагнитного поля A_1, A_2, A_3 будут приняты за φ.

$$A_1, A_2, A_3 = \varphi \tag{19}$$

Некоторая функция, зависящая от G примет следующий вид:

$$f(G) = \alpha G^n, \tag{20}$$

где α, n – постоянные.

С учетом вышеописанных условий, уравнение Максвелла примет следующий вид

$$3H_0\dot{\varphi} + 3\ddot{\varphi} = 0 \tag{21}$$

Из уравнения (23) следует, что

$$\varphi = \varphi_0 e^{-H_0 t} + \varphi_1, \tag{22}$$

где φ_0, φ_1 – постоянные.

Подставив данное значение в уравнение (13), получим

$$V = H_0^2\varphi_0^2 e^{-2H_0 t} + V_{10}, \tag{23}$$

где V_{10} – постоянная.

После подстановки найденных значений в уравнения (11) и (18) получаем следующие уравнения

$$3H_0^2 = -p \tag{24}$$

$$p = -\left[3H_0^2 + \alpha G^n(n-1) - \frac{1}{2}H_0^2\varphi_1^2 + V_{10}\right]$$

$$3H_0^2 = \rho \tag{25}$$

$$\rho = \left[3H_0^2 + \alpha G^n(n-1) - \frac{1}{2}H_0^2\varphi_1^2 + V_{10}\right]$$

При подстановке значений (24) и (25) в уравнение состояния (26) получен следующий результат

$$\omega = \frac{p}{\rho} = \frac{-\left[3H_0^2+\alpha G^n(n-1)-\frac{1}{2}H_0^2\varphi_1^2+V_{10}\right]}{\left[3H_0^2+\alpha G^n(n-1)-\frac{1}{2}H_0^2\varphi_1^2+V_{10}\right]} = -1 \tag{26}$$

Данное значение соответствует среде с отрицательной гравитацией, иначе именуемой вакуумом. Для более полного описания кинематики космологического расширения используют специальный набор параметров, значения которых для данной модели приведены ниже

$$q = -1,$$

$$j = 1,$$

$$s = 1,$$

где q – параметр замедления, j – параметр рывка, s – параметр щелчка.

Для ускоренного возрастания масштабного фактора необходимо, чтобы параметр замедления был меньше нуля. Как видно из его значения, данное условие соблюдено. Параметр рывка должен быть больше нуля, данное условие также соблюдается в исследуемой модели.

Найдем параметры медленного скатывания [3], также именуемые наклоном $\epsilon(t)$ и кривизной $\eta(t)$ потенциала по следующим формулам

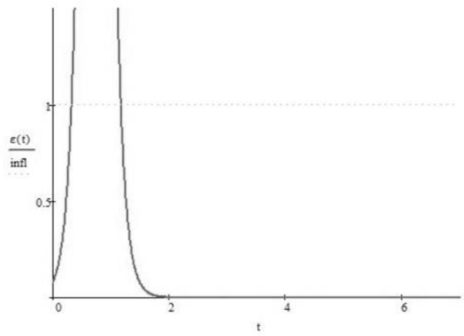
$$\epsilon(t) = \frac{1}{2\dot{\varphi}^2}\left(\frac{\dot{V}}{V}\right)^2, \tag{27}$$

$$\eta(t) = \frac{\ddot{V}}{\dot{\varphi}^2} - \frac{\dot{V}\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^3}. \tag{28}$$

Используя данные из (27) и (28) получаем следующие значения

$$\epsilon(t) = 2\left(\frac{H_0^2\varphi_0 e^{-H_0 t}}{H_0^2\varphi_0^2 e^{-2H_0 t} + V_{10}}\right)^2,$$

$$\eta(t) = \frac{3H_0^2}{H_0^2\varphi_0^2 e^{-2H_0 t} + V_{10}}$$



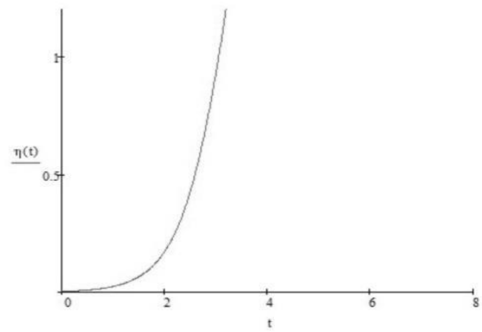


Рис.1 – Наклон потенциала $\epsilon(t)$ Рис.2 – Кривизна потенциала $\eta(t)$

Условием возникновения инфляции является неравенство $\epsilon(t) \ll 1$. Как видно на Рис. 1 данное условие соблюдено. Кривизна потенциала $\eta(t)$ Рис. 2 исходя из вычислений, также меньше единицы.

В данной статье была рассмотрена модель гравитации Гаусса-Бонне с электромагнитным и скалярным полем в метрике Фридмана-Робертсона-Уокера. Получены уравнения Фридмана, Максвелла и Клейна-Гордона. Уравнение состояния соответствует среде вакуума, в рассматриваемой модели соблюдаются условия космологических параметров. Рассмотрены параметры медленного скатывания, соответствующие условию возникновения инфляционной стадии развития Вселенной.

Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан AP08955524.

Список использованных источников

1. Primordial perturbations and inflation in a holography inspired Gauss-Bonnet Cosmology. Nicolas R. Bertini, Neven Bilić and Davi C. Rodrigues. arXiv:2012.05154v2 [gr-qc] 22 Dec 2020
2. Разина О.В, Цыба П.Ю., Сагидуллаева Ж.М. Степенное решение модели $f(R)$ гравитации с максвелловским членом и g-эссенцией // Вестник Карагандинского государственного университета им. Е.А. Букетова. Серия «Физика» 201919394-102.
3. Inflation in Mimetic f (G) Gravity. Yi Zhong and Diego Sáez-Chillón Gómez. Symmetry 2018, 10, 170; doi:10.3390/sym10050170. Published: 17 May 2018