ӘОК 530.1

ӨЗДІГІНЕН ҮЙЛЕСІМДІ ПОТЕНЦИЯЛЫ БАР (2+1) ӨЛШЕМДІ СПИН МОДЕЛІНІҢ ГЕОМЕТРИЯСЫН ЗЕРТТЕУ

Құсман Ақниет Оразәліқызы[1], Серикбаев Нұржан Сагындыкович[2]

kusman.akniet.07@gmail.com

[1]Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ Физика-техникалық факультеті студенті,Нұр-Сұлтан, Қазақстан

[2]«Р. Мырзақұлов атындағы Еуразия халықаралық теориялық физика орталығы» ЖШС,Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Ғылыми жетекшісі- Нугманова Г.Н

Тұрақты орташа қисықтық $H \neq 0$ беттері қарастырылады. 3 өлшемді Евклид E^3 кеңістігіне батырылған тұрақты орташа қисықтық беттері сабын көпіршіктері мәселесінде пайда болады, егер көпіршік бетінің екі жағындағы (тұрақты) сыртқы қысым әр түрлі болса егер қысым екі жағынан бірдей болса, онда біз минималды беттерді аламыз, яғни E^3-тегі тұрақты орташа қисықтық беттер үшін Гаусстың дисплейі гармоникалық, яғни қалыпты N векторы момент теңдеуін қанағаттандырады.

$$N_{xx} + N_{yy} + (N_x^2 + N_y^2)N = 0 \tag{1}$$

Бізде мұндағы x, y-қисықтықтың координаттары (немесе олардың конформдық баламалары). Бұл 2 өлшемді Евклид O(3) σ-модель, ол классикалық өріс теориясында пайда болады, сонымен қатар Гейзенберг ферромагнетикасының 2 + 1 өлшемді тұрақты классикалық теңдеуінің статикалық шешімдерін сипаттайды

$$S_t = S \times (S_{xx} + S_{yy}) \qquad S^2 = 1 \tag{2}$$

Біз Долива мен Сантини ұсынған тәсілді қолданамыз, ол теріс тұрақты секциялық қисықтықтың ішкі пайда болу жағдайына сәтті қолданылды. $S^3 \subset E^4$ сферасына батырылған тұрақты орташа қисықтық беттерге арналған Гаусс-Вайнгартен теңдеулерінде S^3 сферасының R радиусы анық көрсетілген [2]. Бұл жұмыстың негізгі нәтижесі - R спектрлік параметрдің рөлін атқаратындығын көрсету (дәлірек айтқанда, R спектрлік параметрдің функциясы).

R = R (x, y) позиция векторымен анықталған $S^3 \subset E^4$(радиусы R) сферасына батыруды қарастырыңыз. Бірлік векторы r / R ортогональды S^3, ал екінші қалыпты векторды S^3-ке тангенс деп таңдаймыз. Біз әрқашан конформды координаттарды қарастыра аламыз, яғни бірінші фундаменталды форма $dx^2 + dy^2$ пропорционалды, ал екінші фундаменталды форма N-мен байланысты

$$\begin{aligned} I &:= dr \cdot dr = e^{2v}(dx^2 + dy^2) \\ II &:= -dr \cdot dn = b_{11}dx^2 + 2b_{12}dxdy + b_{22}dy^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Сонымен қатар, қалыпты r/R-мен байланысты II' екінші негізгі формасы метрикаға пропорционалды. Шынында да,

$$II' := -dr \cdot d(r/R) = -\frac{1}{R}dr \cdot dr = -k_0 e^{2v}(dx^2 + dy^2) \tag{4}$$

$k_0=1/R$ біз бірлікті тангенс векторларымен белгілейміз $E_1 \equiv e^{-v} r_x$ және $E_2 \equiv e^{-v} r_x$ [1,4]қалыпты Вектор $E_3 \equiv n$, $E_4 \equiv r/R$. қисықтықтың орташа векторы деп аталады.

$$\vec{H} = hE_3 - k_0 E_4 \tag{5}$$

Онда

$$h := \frac{1}{2}(b_{11} + b_{22})e^{-2v} \tag{6}$$

Естеріңізге сала кетейік, d- субманифольдық жағдайда (d > 2) $\vec{H}$ ковариантты тұрақтылық H = const шартының табиғи жалпылауы болып табылады.Бейімделген раманың кинематикасы (Гаусс-Вайнгартен теңдеулері немесе құрылымдық теңдеулер) іргелі формалардың коэффициенттері арқылы өрнектелуі мүмкін:

$$\begin{aligned} r_{xx} &= v_x r_x - v_y r_y + b_{11} n - R^{-2} e^{2v} r \\ r_{xy} &= v_y r_x + v_x r_y + b_{12} n \\ r_{yy} &= v_y r_y - v_x r_x + b_{22} n - R^{-2} e^{2v} r \\ n_x &= -b_{11} e^{-2v} r_x, n_y = -b_{22} e^{-2v} r_y \end{aligned} \tag{7}$$

n ≡ E^3 және E^4 ≡ k_0r ковариантты тұрақты екенін ескеріңіз. Сондықтан h=const болса, $\vec{H}$ ковариантты тұрақты болады. Біз (7) теңдеулердіматрицалықтүрдеқайтажазааламыз:

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -v_y & b_{11}e^{-v} & -k_0 e^{v} \\ v_y & 0 & b_{12}e^{-v} & 0 \\ -b_{11}e^{-v} & -b_{12}e^{-v} & 0 & 0 \\ k_0 e^{v} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\frac{d}{dy}\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & v_x & b_{11}e^{-v} & 0 \\ -v_x & 0 & b_{22}e^{-v} & -k_0 e^{v} \\ -b_{12}e^{-v} & -b_{22}e^{-v} & 0 & 0 \\ 0 & k_0 e^{v} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{pmatrix}$$

$(E_1, E_2, E_3, E_4)^T \in SO(4)$ Φ және f_{jk} арқылы SO(4) матрицалық алгебрасының стандартты генераторлары арқылы белгілеу, бізде

$$\begin{aligned} \Phi_y &= \hat{V}\Phi \equiv \left(v_x f_{12} + b_{22}e^{-v} f_{23} - k_0 e^{v} f_{24} + b_{12}e^{-v} f_{13}\right)\Phi \\ \Phi_X &= \hat{U}\Phi \equiv (-v_y f_{12} + b_{11}e^{-v} f_{13} - k_0 e^{v} f_{14+} + b_{12}e^{-v} f_{23})\Phi \end{aligned} \tag{9}$$

Гаусс-Кодацци теңдеулер жүйесі (жоғарыдағы матрицалық сызықтық теңдеулер жүйесі үшін үйлесімділік шарттарына ұқсас) берілген

$$\begin{aligned} &v_{xx} + v_{yy} + (b_{11}b_{22} - b_{12}^2)e^{-2v} + k_0^2 e^{2v} = 0 \\ &b_{12x} = b_{11y} - v_y\left(b_{11} + b_{22}\right) \\ &b_{12y} = b_{22x} - v_x\left(b_{11} + b_{22}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

Күрделі айнымалыларды енгізу z = x + iy, $\bar{z}$ = x-iy және күрделі функция

$$Q := \frac{1}{4}\left(b_{11} - b_{22}\right) - \frac{1}{2} i b_{12} \tag{11}$$

Хопф дифференциалы ретінде белгілі біз Гаусс Кодацци теңдеулерін [3] келесідей қайта жаза аламыз

$$\begin{gathered} 4v_{zz} + (h^2 + k_0^2)e^{2v} - 4Q\overline{Q}e^{-2v} = 0 \\ Q_z = \frac{1}{2} h_z e^{2v} \end{gathered} \tag{12}$$

Егер h = const болса, онда r (x, y) E^4-ке батырылған беттердің тұрақты орташа қисықтығын сипаттайды және жүйе (12) төмендейді

$$v_{zz} + \frac{1}{4} H^2 e^{2v} - Q\overline{Q}e^{-2v} = 0, \qquad Q = Q(z) \tag{13}$$

(яғни Q (z) - аналитикалық функция), мұндағы

$$H^2 = h^2 + k_0^2 \tag{14}$$

Жүйені (13) эллиптикалық Синус-Гордон теңдеуінеайналдыруғаболады

$$u_{XX} + u_{YY} = -\sinh u \cosh u \tag{15}$$

айнымалылардыңөзгеруібойынша $Z \to Z \equiv X + iY$ және $\theta \to u$, мұндағы

$$dZ = \sqrt{8HQ(z)}dz,\ u = v - \ln(2H^{-1}|Q(Z)|) \tag{16}$$

Назар аударыңыз, (15) сол жақтағы белгі теріс. Оң және теріс жағдайлардың екеуі де физикада кейбір қосымшаларға ие және екеуі де интегралданатын ((13-ті қараңыз) теңдеулерді E^3-ке батырылған H тұрақты орташа қисықтық беттері үшін Гаусс-Кодацци теңдеулері ретінде де түсіндіруге болады

(14) кез-келген бекітілген H үшін сызықтық теңдеулер (9) бір параметрлі теңдеулер тобын құрайды (спектрлік параметрі бар сызықтық есеп), параметрленген к, мұндағы

$$h = H\cos k, \quad k_0 = H\sin k \tag{17}$$

немесе h және k_0 терминдерін $\zeta = e^{ik}$, яғни

$$h = \frac{H}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \quad \frac{1}{R} \equiv k_0 = \frac{H}{2i}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) \tag{18}$$

Спектрлік параметр ζ бірлік шеңбердегі мәндерді қабылдайтынын ескеріңіз. (9) теңдеулерінде пайда болатын b_{ij} коэффициенттерін Q және ϑ салыстырыңыз (6) және (11):

$$b_{11} = he^{2v} + 2\operatorname{Re}Q, \ b_{12} = -2\operatorname{Im}Q, \ b_{22} = he^{2v} - 2\operatorname{Re}Q \tag{19}$$

Соңында бізде келесі SO (4) таңбалы спектрлік есеп бар

$$\Phi_x = \hat{U}\Phi \equiv \sum_{i<j} u_{ij} f_{ij} \Phi, \quad \Phi_y = \hat{V}\Phi \equiv \sum_{i<j} v_{ij} f_{ij} \Phi \tag{20}$$

мұндағы

$$\begin{aligned}
\hat{U} &= \frac{\varsigma H}{2} e^{v} (f_{13} + i f_{14}) + \frac{H}{2\varsigma} e^{v} (f_{13} - i f_{14}) + \hat{U}_0 \\
\hat{U}_0 &:= -v_y f_{12} + 2e^{-v} f_{13} \operatorname{Re} Q - 2e^{-v} f_{23} \operatorname{Im} Q \\
\hat{V} &= \frac{\varsigma H}{2} e^{v} (f_{23} + i f_{24}) + \frac{H}{2\varsigma} e^{v} (f_{23} - i f_{24}) + \hat{V}_0 \\
\hat{V}_0 &:= v_x f_{12} - 2e^{-v} f_{23} \operatorname{Re} Q - 2e^{-v} f_{13} \operatorname{Im} Q
\end{aligned} \tag{21}$$

Сызықтық есеп үшін үйлесімділік шарттары (20), (21) (13) өрнегімен берілген. Біздің мақсаттарымыз үшін so(4) ≅ (4) топ изоморфизмін қолдану өте ыңғайлы, яғни.,

$$f_{ij} \leftrightarrow \frac{1}{2} e_i e_j \tag{22}$$

мұндағы e_j-Клиффорд деп аталатын сандар

$$e_j^2 = 1, (j = 1,2,3,4) \qquad e_i e_j = e_j e_i, (i \neq j) \tag{23}$$

Топтық айналдыру(4) - so (4) Қос жабыны. Жоғарыда келтірілген изоморфизмді қолдана отырып, біз бірден келесі спиндік(4) таңбалы спектрлік есепті аламыз

$$\Psi_x = U\Psi = \frac{1}{2} \sum_{i<j} u_{ij} e_i e_j \Psi \tag{24}$$

$$\Psi_y = V\Psi = \frac{1}{2} \sum_{i<j} v_{ij} e_i e_j \Psi$$

мұнда u_{ij} және v_{ij} өрнектермен анықталады (20), (21), яғни.,

$$\begin{aligned}
2U &= He^{v} e_1 (e_3 \cos k - e_4 \sin k) - v_y e_1 e_2 + 2e^{-v} (e_1 \operatorname{Re} Q - e_2 \operatorname{Im} Q) e_3 \\
2V &= He^{v} e_2 (e_3 \cos k - e_4 \sin k) + v_x e_1 e_2 - 2e^{-v} (e_1 \operatorname{Im} Q + e_2 \operatorname{Re} Q) e_3
\end{aligned} \tag{25}$$

Спектрлік есеп матрицаларының (25) келесі қасиетке ие екенін тексеру оңай:

$$U(-k) = e_4 U(k) e_4^{-1}, \qquad V(-k) = e_4 V(k) e_4^{-1} \tag{26}$$

Сондықтан біз Ψ қанағаттандыратын шешімдермен шектеле аламыз

$$\Psi(-k) = e_4 \Psi(k) e_4^{-1} \tag{27}$$

Іс жүзінде к оң мән ретінде анықталады (салыстырыңыз (17)). Сондықтан (26) теңдеулерді алынған спектрлік есептің к мәндеріне кеңеюі ретінде қарастыруға болады (к < 0 формальды түрде R теріс дегенді білдіреді). R-ге байланысты E_k кадрын Клиффорд сандары тұрғысынан да білдіруге болады, атап айтқанда

$$E_k \leftrightarrow E_k := \Psi^{-1} e_k \Psi \tag{28}$$

Ek e_1, e_2, e_3, e_4 қамтитын 4 өлшемді W сызықтық кеңістігінде ортонормальды негіз құратынын ескеріңіз. $\Phi := (E_1, E_2, E_3, E_4)^T$ анықтаңыз және есептеңіз

$$E_{k'x} = (\Psi^{-1} e_k \Psi)_x = \Psi^{-1} [e_k, U] \Psi \tag{29}$$

у-туынды үшін ұқсас өрнек. Күші

$$[e_k, U] = \sum_{j>k} u_{kj} e_j - \sum_{i>k} u_{ik} e_i \tag{30}$$

Біз тағы да so(4) спектрлік мәселесін аламыз ($W \cong E4$ кеңістігінде анықталған). Осылайша, біз Ф (20), (21) қанағаттандыратындығын дәлелдедік Ψ, (24)болғанда шешілді. Атап айтқанда, $W \cong E4$ қолдана отырып, біз тұрақты орташа қисықтықтың ($r \cong r$) қарастырылып отырған Батырылуының $r \in E4$ позициясының Ψ векторы арқылы білдіре аламыз:

$$r = RE_4 \equiv R\Psi^{-1} e_4 \Psi \tag{31}$$

Соңында біз анықтаймыз

$$F = \lim_{R \to \infty} (r - \mathrm{Re}_4) \tag{32}$$

Біз F-ті E^3-ке батыру керек деп күтеміз ($R \to \infty$ кезінде S^3 сферасы Жергілікті E^3 болады). Анықтамадағы Re_4 азайту (32) біз неғұрлым ыңғайлы сілтеме бастауды таңдайтынымызды білдіреді (сфера орталығының орнына "соққы" сферасының бекітілген нүктесі). Бұл Солтүстік полюс немесе ($R < 0$ кезінде) Оңтүстік. $R \to \infty$ шегі $\zeta \to 1$, $\kappa \to 0$ және $k_0 \to 0$ дегенді білдіреді. Матрицаның осы шегінде U, V берілген (25) матрицаларында e_4 болмайды. (27) мынаны білдіреді

$$\Psi_0 e_4 = e_4 \Psi_0 \qquad \Psi'_0 e_4 = -e_4 \Psi'_0 \tag{33}$$

мұндағы $\Psi_0 := \Psi(x, y, 0)$ (яғни Ψ κ = 0 деп бағаланады), ол қарапайым-к бойынша саралауды білдіреді. (32) шегі келесідей есептелуі мүмкін:

$$F = \lim_{R \to \infty} R(\Psi^{-1} e_4 \Psi - e_4) = \lim_{k_0 \to 0} \frac{\Psi^{-1} e_4 \Psi - e_4}{k_0} \tag{34}$$

Л' Хоспитал (17) және (33) ережесін қолдана отырып, біз аламыз

$$F = (-\Psi^{-1} \Psi_{k_0} \Psi^{-1} e_4 \Psi - e_4 \Psi + \Psi^{-1} e_4 \Psi_{k_0})_{k_0 = 0} = 2H^{-1} e_4 \Psi^{-1} \Psi_k ;_{k=0} \tag{35}$$

Осылайша біз Sym формуласын алдық. E^4 факторы өте ыңғайлы, өйткені $F = F(x, y)$ e_1, e_2, e_3 қамтитын E^3 кеңістігіне енуді сипаттайды. Біз F батыру үшін негізгі формаларды $\kappa_0 \to 0$ шегінде R үшін негізгі формалардан алуға болады деп күтеміз. Шынында да, біз есептейміз

$$
\begin{aligned}
&F_x = 2H^{-1}e_4\Psi_0^{-1}U_k(0)\Psi_0 = -e_4e^v\Psi_0^{-1}e_1e_4\Psi_0 = e^v\tilde{e}_1\\
&F_y = 2H^{-1}e_4\Psi_0^{-1}V_k(0)\Psi_0 = -e_4e^v\Psi_0^{-1}e_2e_4\Psi_0 = e^v\tilde{e}_2\\
&N = \Psi_0^{-1}e_3\Psi_0 = \tilde{e}_3\\
&N_x = \Psi_0^{-1}[e_3, U(0)]\Psi_0 = -He^v\tilde{e}_1 - 2e^{-v}(\tilde{e}_1\operatorname{Re}Q - \tilde{e}_2\operatorname{Im}Q)\\
&N_y = \Psi_0^{-1}[e_3, V(0)]\Psi_0 = -He^v\tilde{e}_2 + 2e^{-v}(\tilde{e}_1\operatorname{Im}Q + \tilde{e}_2\operatorname{Re}Q)
\end{aligned}
\tag{36}
$$

мұндағы $\tilde{e}_k := \Psi_0^{-1}e_k\Psi_0$ $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ E^3-де ортонормальды жақтауды құрайтындығын ескере отырып, біз негізгі формаларды аламыз (3), (19):

$$
\begin{aligned}
&I = e^{2v}(dx^2 + dy^2)\\
&II = (he^{2v} + 2\operatorname{Re}Q)dx^2 - 4\operatorname{Im}Q dxdy + (he^{2v} - 2\operatorname{Re}Q)dy^2
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Орташа қисықтықты есептеу арқылы ((6) формула бойынша) алынған F E^3тегі тұрақты орташа қисықтықтың беті екенін тексереміз. Бір қызығы, ұсынылған геометриялық интерпретация Sym формуласы спиннің (4) спектрлік есебіне тікелей қолданылған кезде E^3-тегі орташа қисықтықтың тұрақты беттерін береді. Әдетте біз E^3-тегі беттерді спиннің кейбір спектрлік тапсырмасынан (3) (яғни SU(2)) аламыз деп күтеміз. Бұл тәсіл біздің жағдайда да мүмкін екендігі белгілі болды

S^3 тұрақты орташа қисықтық бетімен байланысқан қозғалмалы раманың кинематикасын қарастыра отырып, Синус Гордонның эллиптикалық теңдеуіне сәйкес келетін спектрлік параметрі бар сызықтық есеп шығарылды. Спектрлік параметр S^3 сферасының R радиусымен байланысты. Осы сызықтық тапсырмаға қолдану E^3 - тегі орташа қисықтықтың тұрақты беттерін береді. R $\to\infty$ шекті процесі арқылы алуға болатындығын көрсетілді

Клиффорд алгебралары мен спиндік топтардың рөлі Sym формуласын шығаруда өте маңызды екендігі белгілі болды. Біз Клиффорд алгебрасы тұрғысынан анықталған, спектрлік есептермен байланысты ішкі құрылымға кеңейтуді қарастырдық.

Бұл зерттеуді ҚР БҒМ қаржыландырды, IRN AP08857372.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Aminov Yu A, Geometry of submanifolds, NaukovaDumka, Kiev, 2002, Chapter 7 [in Russian].
2. Aminov Yu A and Cie´slinski J L , The immersions of regions of Lobachevsky spaces into spheres and Euclidean spaces and geometric interpretation of the spectral parameter, Izvestiavuzov. Matematika 10 (2004), 19–32.
3. Bobenko A I, Surfaces in Terms of 2 by 2 Matrices. Old and New Integrable Cases, in Harmonic maps and integrable systems, Editors: FordyA P and Wood J C, Aspects of Mathematics 23, Vieweg, Brunswick, 1994.
4. Chen B Y, Geometry of submanifolds, Marcel Dekker, New York, 1973.
5. Chern S S, Surface Theory with Darboux and Bianchi, in Miscellanea Mathematica, Editors: Hilton P, Hirzebruch F and Remmert R, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1991, 59–69.