УДК 834

СТЕПЕННАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ВСЕЛЕННОЙ В КОСМОЛОГИИТИПА ВАЛЕЦКИ

Төлегенова Асель Санжарқызы
bokina_as@mail.ru
магистрант 1- курса Евразийского Национального университета им. Л.Н. Гумилева,
г. Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – О.В. Разина

Хорошо известно, что Вселенная образовалась в результате Большого Взрыва около 13,8 млрд лет назад. Ученые заметили, что расстояние между звездными системами постоянно увеличивается, что привело к открытию непрерывного возрастания Вселенной. Но в конце 1990-х годов был сделан вывод о том, что космическое расширение происходит с ускорением благодаря преобладанию темной энергии, составляющей73% материи [1]. Так, темная энергия определяется уравнением параметра состояния ω. Для изучения характеристики расширения Вселенной применяется безразмерный масштабный коэффициент (масштабный фактор), определяющий изменение расстояния между галактиками во времени [2].

Источниками гравитационного поля космологии типаВалецки являются лагранжиан плотности безмассового фермионного поля, лагранжианы массивных скалярных и векторных полей, а также плотность лагранжиана взаимодействия типа Юкавы между фермионным и скалярным полями. В данной модели взаимодействие происходит через обмен мезонами.Единицы измерения выбираем так, что $8\pi G = c = \hbar = 1$.

Действие для гравитационного поля в общем виде представляется следующим образом

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{R}{2} + L_m\right), \quad (1)$$

где g - определитель метрического тензора;R - скалярная кривизна, описывающая геометрию пространства; L_m- лагранжиан материи.

Для изучения действия используется метрика Фридмана-Робертсона-Уокера (ФРУ) в декартовой системе координат

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (2)$$

где $a(t)$ является масштабным фактором.

Так, скалярная кривизна в метрике ФРУ в декартовой системе координат равна

$$R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right).$$

Действие космологической модели типа Валецки в явном виде совместно с метрикой ФРУ описывается

$$S = \int d^4x \left(3a\dot{a}^2 + a^3 \frac{i}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^0\psi - \dot{\bar{\psi}}\gamma^0\psi + 2iqA_0\bar{\psi}\gamma^0\psi\right] + a^3\left[\xi(\bar{\psi}\psi)^n - \lambda\bar{\psi}\phi\psi + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m_b^2\phi^2 - \frac{1}{2}m_v^2A_0^2\right]\right).$$

Используя уравнение Эйлера-Лагранжа, мы определяем уравнения Фридмана (3), Дирака (4-5) и Клейна-Гордона (6)

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \left[\xi(\bar{\psi}\psi)^n + \lambda\bar{\psi}\phi\psi - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}m_b^2\phi^2 - \frac{1}{2}m_v^2A_0^2\right] -$$
$$- \frac{i}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\gamma^0\psi + 2iqA_0\bar{\psi}\gamma^0\psi\right], \quad (3)$$

$$\dot{\psi} + \frac{3}{2}H\psi + i[qA_0 + \xi n(\bar{\psi}\psi)^{n-1}\gamma^0 + \lambda\phi\gamma^0]\psi = 0, \quad (4)$$

$$\dot{\bar{\psi}} + \frac{3}{2}H\bar{\psi} - i\bar{\psi}[qA_0 + \xi n(\bar{\psi}\psi)^{n-1}\gamma^0 + \lambda\phi\gamma^0] = 0, \quad (5)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \lambda\bar{\psi}\psi + m_b^2\phi = 0. \quad (6)$$

Условие нулевой энергии

$$L_{\dot{a}}\dot{a} + L_{\dot{\phi}}\dot{\phi} + L_{\dot{\psi}}\dot{\psi} + \dot{\bar{\psi}}L_{\dot{\bar{\psi}}} - L = 0, \quad (7)$$

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \xi(\bar{\psi}\psi)^n - \lambda\bar{\psi}\phi\psi + \frac{1}{2}m_b^2\phi^2 - \frac{q^2}{2m_v^2}(\bar{\psi}\gamma^0\psi)^2 = 0, \quad (8)$$

где $A_0 = q\frac{\bar{\psi}\gamma^0\psi}{m_v^2}$ – векторное поле.

С помощью уравнений Фридмана (9)-(10) и уравнения сохранения (11)

$$3H^2 = \rho, \quad (9)$$

$$3H^2 + 2\dot{H} = -p, \quad (10)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (11)$$

получим плотность энергии источников гравитационного поля (12) и давление (13)

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \xi(\bar{\psi}\psi)^n + \lambda\bar{\psi}\phi\psi + \frac{1}{2}m_b^2\phi^2 + \frac{q^2}{2m_v^2}(\bar{\psi}\gamma^0\psi)^2, \quad (12)$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \xi(n-1)(\bar{\psi}\psi)^n - \frac{1}{2}m_b^2\phi^2 + \frac{q^2}{2m_v^2}(\bar{\psi}\gamma^0\psi)^2. \quad (13)$$

Выразив $\bar{\psi}\psi$ через u, найдем ее производную, затем подставим полученное в уравнение Дирака (4)-(5)

$$\dot{u} = \dot{\bar{\psi}}\psi + \bar{\psi}\dot{\psi}, \quad (14)$$

$$\dot{u} = -\frac{3}{2}H\bar{\psi}\psi - i\bar{\psi}[qA_0 + \xi n u^{n-1}\gamma^0 + \lambda\phi\gamma^0]\psi -$$
$$-\frac{3}{2}H\bar{\psi}\psi + i\bar{\psi}[qA_0 + \xi n u^{n-1}\gamma^0 + \lambda\phi\gamma^0]\psi = -3Hu. \quad (15)$$

Поскольку $\dot{u}$это производная по времени, а постоянная Хаббла H= $\frac{\dot{a}^2}{a^2}$, проинтегрировав получим, что

$$u = \frac{C}{a^3}, \quad (16)$$

который выполняется для всех моделей и *C = const.*

При подстановке полученных данных плотности и давления, а также уравнение Клейна-Гордона в уравнение сохранения энергии, получим следующее выражение

$$\bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi} + \dot{\bar{\psi}}\gamma^0\psi + 3H\bar{\psi}\gamma^0\psi = 0, \quad (17)$$

откуда выразим, что $z = \bar{\psi}\gamma^0\psi$, тогда образующая будет равна

$$\dot{z} = \dot{\bar{\psi}}\gamma^0\psi + \bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi}. \quad (18)$$

Поскольку $\dot{z}$это производная по времени, и мы знаем, что постоянная Хаббла $H = \frac{\dot{a}^2}{a^2}$, то

$$z = \frac{C\prime}{a^3}, \quad (19)$$

где $C' = const$.

Рассмотрим такой случай, когда масштабный фактор изменяется по степенному закону$a = a_0 t^{\alpha},$при $a_0 > 0, \alpha > 1$.

Найдем функцию скалярного поля ϕ, для этого используются уравнения Фридмана (9)-(10), плотности(12) и давления (13)

$$m_b^2\phi^2 + \lambda\phi u + \xi(2-n)u^n - 6H^2 - 2\dot{H} = 0. \quad (20)$$

Тогда при подстановке в полученное последнее выражение таких данных:$u = \frac{C}{a^3} = \frac{\mathrm{C}}{a_0^3 t^{3\alpha}}$, H = $\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\alpha}{t}$,$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{\alpha}{t^2}$, будем иметь

$$m_b^2\phi^2 + \lambda\phi\frac{\mathrm{C}}{a_0^3 t^{3\alpha}} + \xi(2-n)\frac{\mathrm{C}^n}{a_0^{3n}t^{3n\alpha}} - \frac{2\alpha - 6\alpha^2}{t^2} = 0. \quad (21)$$

Решая тождество в виде квадратного уравнения, найдем значения ϕ

$$\phi_{1,2} = -\frac{\lambda C}{2m_b^2 a_0^3 t^{3\alpha}} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2 C^2}{4m_b^4 a_0^6 t^{6\alpha}} - \frac{1}{m_b^2}(\frac{\xi(2-n)\mathrm{C}^n}{a_0^{3n}t^{3n\alpha}} + \frac{2\alpha - 6\alpha^2}{t^2})}. \quad (22)$$

При нахождении функции фермионного поля ψ, используем формулу

$$\psi_k = B_k(t)e^{iD_k(t)}, \quad (23)$$

где $k = 0,1,2,3$. Компонент векторного поля определяется как $A_0 = q\frac{\bar{\psi}\gamma^0\psi}{m_v^2} = \frac{qC\prime}{m_v^2 a_0^3 t^{3\alpha}}$. Из уравнения Дирака (4)

$$\begin{aligned}
&\dot{\psi}_0 + \frac{3}{2}H\psi_0 + i[qA_0 + \xi n u^{n-1} + \lambda\phi]\psi_0 = 0,\\
&\dot{\psi}_1 + \frac{3}{2}H\psi_1 + i[qA_0 + \xi n u^{n-1} + \lambda\phi]\psi_1 = 0,\\
&\dot{\psi}_2 + \frac{3}{2}H\psi_2 - i[qA_0 + \xi n u^{n-1} + \lambda\phi]\psi_2 = 0,\\
&\dot{\psi}_3 + \frac{3}{2}H\psi_3 - i[qA_0 + \xi n u^{n-1} + \lambda\phi]\psi_3 = 0,
\end{aligned} \tag{24}$$

поскольку $\psi = \begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}, \dot{\psi} = \begin{pmatrix}\dot{\psi}_0\\ \dot{\psi}_1\\ \dot{\psi}_2\\ \dot{\psi}_3\end{pmatrix}, \gamma^0 = \begin{pmatrix}1 & 00 & 0\\ 0 & 10 & 0\\ 0 & 0-1 & 0\\ 0 & 00 & -1\end{pmatrix}$. Так как выражения отличаются только индексами, рассмотрим решение для ψ_0

$$\psi_0 = B_0(t)e^{iD_0(t)} \to \dot{\psi}_0 = \dot{B}_0 e^{iD_0} + B_0 e^{iD_0} i\dot{D}_0, \tag{25}$$

$$\dot{B}_0 + iB_0\dot{D}_0 + \frac{3}{2}HB_0 + i[qA_0 + \xi n u^{n-1} + \lambda\phi]B_0 = 0. \tag{26}$$

Решим выражение с помощью свойства комплексного числа.

$$\dot{B}_0 + \frac{3}{2}HB_0 = 0, B_0(\dot{D}_0 + [qA_0 + \xi n u^{n-1} + \lambda\phi]) = 0, \tag{27}$$

$$B_0 = \frac{B_{00}}{a_0^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}\alpha}}, \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
D_0 = &-\frac{q^2 C\prime t^{1-3\alpha}}{m_v^2 a_0^3(1-3\alpha)} - \frac{\xi n C^{n-1} t^{1-3n\alpha}}{a_0^{3n}(1-3n\alpha)} - \frac{\lambda^2 C a_0^n t^{1+n-3n\alpha}}{2m_b^2 a_0^{3n}(1+n-3n\alpha)} \pm\\
&\pm \int \frac{\lambda}{2m_b^2 a_0^{3n}(1+n-3n\alpha)} \sqrt{\frac{\lambda^2 C^2}{4m_b^4 a_0^6 t^{6\alpha}} - \frac{1}{m_b^2}\left(\frac{\xi(2-n)C^n}{a_0^{3n} t^{3n\alpha}} + \frac{2\alpha - 6\alpha^2}{t^2}\right)} + D_{00},
\end{aligned} \tag{29}$$

где $B_{k0} = const$, $D_{k0} = const$. Все компонентыфермионного поля приобретут следующий вид

$$\begin{aligned}
\psi_0 = &\frac{B_{00}}{a_0^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}\alpha}} \exp[i(-\frac{q^2 C\prime t^{1-3\alpha}}{m_v^2 a_0^3(1-3\alpha)} - \frac{\xi n C^{n-1} t^{1-3n\alpha}}{a_0^{3n}(1-3n\alpha)} - \frac{\lambda^2 C a_0^n t^{1+n-3n\alpha}}{2m_b^2 a_0^{3n}(1+n-3n\alpha)} \pm\\
&\pm \int \frac{\lambda}{2m_b^2 a_0^{3n}(1+n-3n\alpha)} \sqrt{\frac{\lambda^2 C^2}{4m_b^4 a_0^6 t^{6\alpha}} - \frac{1}{m_b^2}\left(\frac{\xi(2-n)C^n}{a_0^{3n} t^{3n\alpha}} + \frac{2\alpha - 6\alpha^2}{t^2}\right)} + D_{00})],
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
\psi_1 = &\frac{B_{10}}{a_0^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}\alpha}} \exp[i(-\frac{q^2 C\prime t^{1-3\alpha}}{m_v^2 a_0^3(1-3\alpha)} - \frac{\xi n C^{n-1} t^{1-3n\alpha}}{a_0^{3n}(1-3n\alpha)} - \frac{\lambda^2 C a_0^n t^{1+n-3n\alpha}}{2m_b^2 a_0^{3n}(1+n-3n\alpha)} \pm\\
&\pm \int \frac{\lambda}{2m_b^2 a_0^{3n}(1+n-3n\alpha)} \sqrt{\frac{\lambda^2 C^2}{4m_b^4 a_0^6 t^{6\alpha}} - \frac{1}{m_b^2}\left(\frac{\xi(2-n)C^n}{a_0^{3n} t^{3n\alpha}} + \frac{2\alpha - 6\alpha^2}{t^2}\right)} + D_{10})],
\end{aligned}$$

$$\psi_2 = \frac{B_{20}}{a_0^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}\alpha}} \exp[-i(-\frac{q^2 C' t^{1-3\alpha}}{m_v^2 a_0^3 (1-3\alpha)} - \frac{\xi n C^{n-1} t^{1-3n\alpha}}{a_0^{3n}(1-3n\alpha)} - \frac{\lambda^2 C a_0^n t^{1+n-3n\alpha}}{2m_b^2 a_0^{3n}(1+n-3n\alpha)} \pm$$

$$\pm \int \frac{\lambda}{2m_b^2 a_0^{3n}(1+n-3n\alpha)} \sqrt{\frac{\lambda^2 C^2}{4m_b^4 a_0^6 t^{6\alpha}} - \frac{1}{m_b^2}(\frac{\xi(2-n)C^n}{a_0^{3n} t^{3n\alpha}} + \frac{2\alpha-6\alpha^2}{t^2})} + D_{20})],$$

$$\psi_3 = \frac{B_{30}}{a_0^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}\alpha}} \exp[-i(-\frac{q^2 C' t^{1-3\alpha}}{m_v^2 a_0^3 (1-3\alpha)} - \frac{\xi n C^{n-1} t^{1-3n\alpha}}{a_0^{3n}(1-3n\alpha)} - \frac{\lambda^2 C a_0^n t^{1+n-3n\alpha}}{2m_b^2 a_0^{3n}(1+n-3n\alpha)} \pm$$

$$\pm \int \frac{\lambda}{2m_b^2 a_0^{3n}(1+n-3n\alpha)} \sqrt{\frac{\lambda^2 C^2}{4m_b^4 a_0^6 t^{6\alpha}} - \frac{1}{m_b^2}(\frac{\xi(2-n)C^n}{a_0^{3n} t^{3n\alpha}} + \frac{2\alpha-6\alpha^2}{t^2})} + D_{30})].$$

Из уравнений Фридмана (9)-(10) вычислим, что

$$\rho = 3H^2 = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{3\alpha^2}{t^2}, \tag{31}$$

$$p = 3H^2 - 2\dot{H} = \frac{3\alpha^2+2\alpha}{t^2}. \tag{32}$$

Уравнение состояния имеет вид

$$p = \omega\rho, \tag{33}$$

где ω - параметр уравнения состояния.

$$\omega = \frac{p}{\rho} = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2} = -1 + \frac{2}{3\alpha}. \tag{34}$$

При -1 $<\omega<-\frac{1}{3}$ - среда имеет отрицательную гравитацию, где происходит ускорение расширения Вселенной, и является квинтэссенцией (частице подобные возбуждения динамического скалярного поля)[4].

Параметр замедления q находится по формуле

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{a^2}. \tag{35}$$

В нашем случае он равняется

$$q = -\frac{\alpha^2-\alpha}{\alpha^2} = -1 + \frac{1}{\alpha}, \tag{36}$$

что соответствует современному условию при $\alpha > 1$ q $<$ 0, допускающее ускоренное расширение Вселенной.

Параметр рывка Вселенной.

$$j = \frac{\dddot{a}a^2}{a^3} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{\alpha^3}. \tag{37}$$

Физические модели описывают только текущее понимание космологических процессов, для которых они созданы. Эффективность этих моделей определяется их гибкостью, т.е. способностью перестраиваться при появлении новых наблюдательных данных. Поэтому исследование любой активно действующей модели сопровождается ее многочисленными модификациями. Для модели типа Валецки мы определили уравнение движения, функции скалярного поля ϕ и фермионного поля ψ. Восстановили потенциалы.

Параметры уравнения состояния, замедления и рывка описывают кинематику космологического расширения.

Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан AP08955524.

Список использованных источников:

1.IanSteer. Who discovered Universe expansion?. — 2012. — arXiv:1212.1359.
2.Падманабхан Т. Формирование структуры во Вселенной // Кембридж: ИздательствоКембриджскогоуниверситета. – 1993. – 483 с.
3. Eddington, S.A., The Expanding Universe // Cambridge University Press -1988.-P.156.
4. Caldwell R. R., Steinhardt P. J. Physical Review Letters // Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation of State. – 1998. - Vol.80. -P.1582-1585.
5. Ribas M.O., ZambianchiP.Jr., Devecchi F. P., Kremer G.M. Fermions in a Walecka-type cosmology //EurophysicsLetters.-2012.-P.8. arXiv:1201.2901.