УДК 517.956.223

ХАРДИ ТЕҢСІЗДІКТЕРІН ИНТЕГРАЛДЫҚ ОПЕРАТОРЛАРДЫ БАҒАЛАУДАҒЫ ҚОЛДАНЫСТАРЫ

Абатов Ханабил Нурадилулы
Xanabil1998@gmail.com
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ-нің 2-курс магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Абылаева А. М.

Айталық $0 < p, q < \infty,\ p > 1,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ және $v(t), w(t) \subset L^{loc}_{(0,\infty)}$ – салмақты функциялар, мұнда $v(t) \geq 0,\ w(t) \geq 0\ \forall t \in I,\ I = (0, \infty)$.

Интегралдық операторларды Харди теңсіздіктері арқылы бағалау [1],[2],[3] жинақталған. Сол мәліметтерді пайдалана отырып (1) операторы үшін Теорема 1-ді дәлелдеп көрсеттім.

$$H_{\alpha,\beta} f(x) = \int u(s) W^{\beta}(s) f(s) \omega(s) W^{1-\alpha}(x) ds \qquad (1)$$

Теорема 1. $1 < p \leq q < \infty$ болсын. $H_{\alpha,\beta}$ операторы (1) арқылы анықталсын. Онда

$$\left(\int_a^b \left(H_{\alpha,\beta} f(x) \right)^q v(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_a^b \left(f(x) \right)^p \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (2)$$

теңсіздігінің орындалуы үшін

$$A_{\alpha,\beta} = \sup_{z \in I} \left(\int_a^z u^{p'}(s) W^{\beta p'}(s) \omega(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_z^b W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

болуы қажетті және жеткілікті. Сонымен қатар $C \approx A_{\alpha,\beta}$

Дәлелдеуі: *қажеттілігі.* (2) теңсіздігі жартылай (частично) үзіліссіз функциялар үшін орындалатын болсын және $\forall (c,d) \subset (a,b)$, $A_{\alpha,\beta} < \infty$ екендігін дәлелдеу керек. Айталық $\chi_{(c,d)}(t) = \begin{cases} 1, \ t \in (c;d) \\ 0, \ t \notin (c;d) \end{cases}$ характеристикалық функция. p, p'- түйіндес параметрлер: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Енді (2) теңсіздігінің орындалуы үшін $f_0(s) = \chi_{(c;d)}(s) u^{\frac{p'}{p}}(s) W^{\frac{p'}{p}}(s)$ функциясы табылады.

(2) теңсіздікті мынандай түрде жазып алайық:

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^x u(s) W^{\beta}(s) f_0(s) \omega(s) ds \right)^q W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\int_a^b (f_0(x))^p \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Теңсіздіктің оң жағын шешейік:

$$\left(\int_a^b (f_0(x))^p \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b \left(\chi_{(c;d)}(x) u^{\frac{p'}{p}}(x) W^{\frac{p'}{p}\beta}(x) \right)^p \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int_a^c + \int_c^d + \int_d^b \left(\chi_{(c;d)}^p(x) u^{p'}(x) W^{\beta p'}(x) \omega(x) dx \right) \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_c^d u^{p'}(x) W^{\beta p'}(x) \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Енді теңсіздіктің сол жағын шешейік:

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^x u(s) W^{\beta}(s) f_0(s) \omega(s) ds \right)^q W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx \right) = \int_a^b \left(\int_a^x u(s) W^{\beta}(s) \omega(s) \chi_{(c;d)}(s) u^{\frac{p'}{p}}(s) W^{\frac{p'}{p}}(s) ds \right)^q W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx =$$

Дәрежелерін түрлендіреміз: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ескере отырып $\frac{p'}{p} + 1 = p'$ екендігін аламыз, сонда

$$\int_a^b \left(\int_a^x \chi_{(c;d)}(s) u^{p'}(s) W^{\beta p'}(s) \omega(s) ds \right)^q W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx = \int_a^c + \int_c^d + \int_d^b \left(\int_a^x \left(\chi_{(c;d)}(x) u^{p'}(s) W^{\beta p'}(s) \omega(s) ds \right) \right) \times$$

$$\times W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx =$$

Интеграл мәндерін есептейік:

1) $\left. \begin{matrix} a \le x \le c \\ a \le s \le x \end{matrix} \right\} \Rightarrow a \le s \le x \le c \Rightarrow s \notin (c;d) \Rightarrow \chi_{(c;d)}(s) = 0$

2) $\left.\begin{array}{l} c \le x \le d \\ a \le s \le x \end{array}\right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a \le s \le c \le x \le d \Rightarrow \chi_{(c;d)}(s) = 0 \\ a \le c \le s \le x \le d \Rightarrow \chi_{(c;d)}(s) = 1 \end{array}\right.$

3) $\left.\begin{array}{l} d \le x \le b \\ a \le s \le x \end{array}\right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a \le s \le c \le d \le x \le b \Rightarrow \chi_{(c;d)}(s) = 0 \\ a \le c \le s \le d \le x \le b \Rightarrow \chi_{(c;d)}(s) = 1 \\ a \le c \le d \le s \le x \le b \Rightarrow \chi_{(c;d)}(s) = 0 \end{array}\right.$

Осыларды ескере отырып, интегралды мына түрде жаза аламыз:

$$\int_c^d \left(\int_c^x u^{p'}(s) W^{\beta p'}(s) \omega(s) ds \right)^q W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx + \int_d^b \left(\int_c^d u^{p'}(s) W^{\beta p'}(s) \omega(s) ds \right)^q W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx \ge$$

$$\ge \int_d^b \left(\int_c^d u^{p'}(s) W^{\beta p'}(s) \omega(s) ds \right)^q W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx = \left(\int_c^d u^{p'}(s) W^{\beta p'}(s) \omega(s) ds \right)^q \left(\int_d^b W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx \right)$$

Алған өрнектерді теңсіздікке қояйық:

$$\left(\int_c^d u^{p'}(s) W^{\beta p'}(s) \omega(s) ds \right) \left(\int_d^b W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\int_c^d u^{p'}(x) W^{\beta p'}(x) \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\int_c^d u^{p'}(s) W^{\beta p'}(s) \omega(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_d^b W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \le C$$

$c \to a$ ұмтылғанда ең үлкен мәнге ие болады

$$\left(\int_a^d u^{p'}(s) W^{\beta p'}(s) \omega(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_d^b W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \le C$$

d бойынша $\sup$ аламыз:

$$\sup_{a \le d \le b} \left(\int_a^d u^{p'}(s) W^{\beta p'}(s) \omega(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_d^b W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \le C$$

Сондықтан, (2) теңсіздігінің орындалуы үшін, $A_{\alpha,\beta} < \infty$ немесе $A_{\alpha,\beta} \le C$ болуы қажетті.

Жеткіліктілігі: $A_{\alpha,\beta} < \infty$ болсын, (2) теңсіздігінің орындалатынын көрсетеміз. $F(t) = \int_a^t u(s) W^{\beta}(s) f(s) \omega(s) ds$ функциясын қарастырамыз. $F(t)$ функциясы монотонды кемімейтін, абсолютті үзіліссіз және $F(a) = 0$. $t_k \le t_{k+1}$ кезінде

$2^k = F(t_k) = \int_a^{t_k} u(s) W^{\beta}(s) f(s) \omega(s) ds$, $2^{k+1} = F(t_{k+1}) = \int_a^{t_{k+1}} u(s) W^{\beta}(s) f(s) \omega(s) ds$ болсын дейік. Егер $I_k = [t_k; t_{k+1})$, $2^k \le F(t) \le 2^{k+1}, t \in I_k$. Осыдан келесі теңдік шығады $2^{k-1} = F(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} u(s) W^{\beta}(s) f(s) \omega(s) ds$.

(2) теңсіздігінің сол жағын қарастырамыз:

$$\int_a^b \left(\int_a^x u(s) W^{\beta}(s) f_0(s) \omega(s) ds \right)^q W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx = \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) F^q(x) dx \le$$

$$\le 4^q \sum_k 2^{q(k-1)} \int_{x_k}^{x_{k+1}} W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx = 4^q \sum_k \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx \right) \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} u(s) W^{\beta}(s) f(s) \omega(s) ds \right)^q \le$$

$\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}$ дәрежелерімен екінші жақша үшін Гельдер теңсіздігін қолданамыз,

$$\le 4^q \sum_k \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx \right) \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} u^{p'}(s) W^{\beta p'}(s) \omega(s) ds \right)^{\frac{q}{p'}} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f^p(s) \omega(s) ds \right)^{\frac{q}{p}} =$$

$$= 4^q \sum_k \left[\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} u^{p'}(s) W^{\beta p'}(s) \omega(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}} \right]^q \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f^p(s) \omega(s) ds \right)^{\frac{q}{p}} \le$$

Интегралдарды a және b-ға дейін үлкейтеміз,

$$\le 4^q \sum_k \left[\left(\int_{x_k}^{b} W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{a}^{x_k} u^{p'}(s) W^{\beta p'}(s) \omega(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}} \right]^q \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f^p(s) \omega(s) ds \right)^{\frac{q}{p}} \le$$

k бойынша *sup* аламыз

$$\le 4^q \sup_x \left[\left(\int_{x_k}^{b} W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{a}^{x_k} u^{p'}(s) W^{\beta p'}(s) \omega(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}} \right]^q \sum_k \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f^p(s) \omega(s) ds \right)^{\frac{q}{p}} \le$$

Йенсен теңсіздігін қолданамыз

$$\leq 4^q \sup_x \left[\left(\int_{x_k}^{b} W^{q(\alpha-1)}(x)v(x)dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^{x_k} u^{p'}(s)W^{\beta p'}(s)\omega(s)ds \right)^{\frac{1}{p'}} \right]^q \left(\sum_k \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f^p(s)\omega(s)ds \right) \right)^{\frac{q}{p}} =$$

$$= 4^q A^q \left(\int_a^b f^p(s)\omega(s)ds \right)^{\frac{q}{p}}$$

Басы мен аяғын біріктірер болсақ,

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^x u(s)W^{\beta}(s)f(s)\omega(s)ds \right)^q W^{q(\alpha-1)}(x)v(x)dx \right) \leq 4^q A^q \left(\int_a^b f^p(s)\omega(s)ds \right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^x u(s)W^{\beta}(s)f(s)\omega(s)ds \right)^q W^{q(\alpha-1)}(x)v(x)dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq 4A \left(\int_a^b f^p(s)\omega(s)ds \right)^{\frac{1}{p}}$$

Онда $A \leq C \leq 4A$, яғни $C \approx A$

Теорема дәлелденді.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. A.Abylayeva and L.-E. Persson. Hardy type inequalities with logarithmic singularities, Luleå University of Technology, Department of Engineering Sciences and Mathematics, Research Report 5 (2016).
2. D.E.Edmunds, V.Kokilashvili and A.Meskhi. Bounded and compact integral operators. Kiluwer Academic Published. Boston / Dordrecht / London.
3. S.M.Farsani. On the boundedness and compactness of the fractional RiemannLiouvilleoperators.Sibirsk.Mat.Zh.54(2013),No.2,468-479(inRussian);translation in Sib. Math. J. 54 (2013), No.2, 368-378.