УДК 517.51

ОБ ОДНОМ ДИСКРЕТНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ГИЛЬБЕРТА-СТИЛТЬЕСА

Бесжанова Айгуль Толегеновна
beszhanova@mail.ru
Докторант 3 курса ЕНУ им. Л.Н. Гумилева
Научный руководитель - Темирханова Айнур Мараловна

Пусть $1 < p, q < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,\ u = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ последовательность неотрицательных, $v = \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$- последовательность положительных действительных чисел. Пусть l_{pv}-

пространство последовательностей $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ действительных чисел, для которых конечна норма $\|f\|_{p,v} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i f_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \le p < \infty$

В начале XX века было доказано известное неравенство двойного ряда Гильберта [1] следующего вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k g_n}{k+n} < \frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}, \quad p>1, \tag{1}$$

где $f_k, g_n \ge 0, \sum_{n=1}^{\infty} f_n^p < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} g_n^{p'} < \infty$ и $\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}$ наилучшая константа в (1) (см. [1])

Неравенство (1) эквивалентно неравенству Харди-Гильберта следующего вида

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{k+n}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f_n \ge 0, \tag{2}$$

выполнение, которого означает ограниченность оператора Гильберта:

$$(Hf)_n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{k+n}$$

из l_p в l_p (см. [2]). Отметим, что аналогичная связь сохраняется между интегральными аналогами неравенств (1) и (2) с наилучшей постоянной $\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}$ (см. [1], [2]).

Неравенство (1) и его обобщение сыграли фундаментальную роль в развитии многих разделов математики, и значительное внимание многих авторов было уделено неравенствам двойного ряда Гильберта, его интегральному аналогу, обратным неравенствам, и различным обобщениям, см. например, [3 - 7]. В работах [8], [9] были установлены ограниченность интегрального оператора Стилтьеса следующего вида

$$S_\gamma f(x) = \int_0^{\infty}\frac{f(t)}{(x+t)^\gamma}dt, \quad x>0, \quad \gamma>0,$$

в весовых пространствах Лебега и весовые оценки для его дискретного аналога

$$(Sf)_n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{(k+n)^\gamma}, \gamma>0$$

при $1 \le p \le q < \infty$ и $1 < q < p < \infty$ соответственно. Более того, в работе [10] были получены эквивалентность четырех альтернативных условий выполнения весового интегрального неравенства для оператора Стилтьеса при $1 \le p \le q < \infty$. Аналогичный результат для весового интегрального неравенства Стилтьеса при $0 < q < p, 1 < p < \infty$ было получено в [11], где, в частности, дано новое доказательство результата Г. Синнамон [9], который также охватывает случай $0 < q < 1$.

В данной работе мы рассматриваем обобщенное неравенство Гильберта-Стилтьеса следующего вида

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n(Tf)_n\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|v_n f_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in l_{p,v}, \tag{3}$$

где

$$(Tf)_n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{\left(b(k)+b(n)\right)^{\gamma}}, \tag{4}$$

оператор типа Гильберта-Стилтьеса, $\gamma > 0$ и $b: N \to N$ неубывающее отображение, такое что $b(1)=1, \quad \lim\limits_{n\to\infty} b(n) = \infty$.

Целью работы является доказательство весовой оценки (3) для оператора типа Гильберта – Стилтьеса (4).

Отметим, что при $\gamma = 1, \; b(n) = n$, неравенство (3) совпадает с неравенством (2). А при $b(n) = n$ оператор T совпадает с дискретным аналогом оператора Стилтьеса.

Оператор (4) для неотрицательной последовательности действительных чисел $f = \{f\}_{i=1}^{\infty}$ можно представить в виде суммы двух дискретных операторов типа Харди с верхним и нижним пределами суммирования следующим образом

$$(Tf)_n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{\left(b(k)+b(n)\right)^{\gamma}} \approx \frac{1}{b^{\gamma}(n)}\sum_{k=1}^{b(n)} f_k + \sum_{k=b(n)}^{\infty}\frac{f_k}{b^{\gamma}(k)} = (T_1 f)_n + (T_2 f)_n, \tag{5}$$

Тогда выполнение неравенства (3) характеризуется разбиением на два весовых неравенства типа Харди для $f \ge 0$.

В работах [12], [13] получены необходимые и достаточные условия выполнения весовых неравенств (3) для дискретных операторов типа Харди T_1, T_2 при $\gamma = 0$. Аналогичные задачи для интегральных операторов типа Харди изучались в серии работ [14–17].

Замечание. В дальнейшем символ $M << K$ означает, что $M \le cK$, где константа $c > 0$ зависит только от несущественных параметров. Если $M << K << M$, то $M \approx K$.

Основной результат:

Положим

$$D_1 = \sup_{n\ge 1}\left(\sum_{i=n}^{\infty}\left(\frac{u_i}{b^{\gamma}(i)}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{b(n)} v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$D_2 = \sup_{n\ge 1}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=b(n)}^{\infty}\left(\frac{v_k}{b^{\gamma}(k)}\right)^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

Теорема 1. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$. *Тогда неравенство (3) выполняется тогда и только тогда* $D = D_1 + D_2 < \infty$. *Кроме того,* $D \approx C$, *где C – наименьшая константа в (3).*

Список использованной литературы

1. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Polya Inequalities, Chap. 9, Cambridge Univ. Press, London, 1952.
2. Q. Chen, B. Yang. A survey on the study of Hilbert-type inequalities., Journal of Inequalities and Applications 2015 (2015) no. 302.

3. Y. Bicheng, L. Debnath. On a new generalization of Hardy{Hilbert's inequality and its applications, Journal of Mathematical Analysis and Applications 233 (1999) 484-497.
4. K. Jichang, L. Debnath On new generalization of Hilbert's inequality and their applications, Journal of Mathematical Analysis and Applications 245 (2000) 248-265.
5. G. Mingzhe. On Hilbert's inequality and its applications, Journal of Mathematical Analysis and Applications 212 (1997) 316-323.
6. M. Gao and B. Yang On the extended Hilbert's inequality, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 126, no.3, pp. 751-759, 1998.
7. K. Jichang On new extensions of Hilbert's integral inequality, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 235, no. 2, pp. 608-614, 1999.
8. K.F. Andersen Weighted inequalities for the Stieltjes- transformation and Hubert's double series, Proc. Roy. Soc Edinburgh, 1980, A86, No. 1-2, 75-84.
9. G. Sinnamon A note on the Stieltjes transformation, Proc. Roy. Soc Edinburgh, 110A, 73-78, 1988
10. A. Gogatishvili, A. Kufner, L.-E. Persson The weighted Stieltjes inequality and applications, Math. Nachr. 286, No. 7, 659 - 668 (2013)
11. A. Gogatishvili, L-E. Persson, V.D. Stepanov, P. Wall Some scales of equivalent conditions to characterize the Stieltjes inequality: the case q < p, Math. Nachr. 287, No. 2-3, 242-253 (2014)
12. A. Alkhliel. Discrete inequalities of Hardy type with variable limits of summation.I, Bull. PFUR. (2010), no. 4, 56-69 (in Russian).
13. A. Alkhliel. Discrete inequalities of Hardy type with variable limits of summation.II, Bull. PFUR. (2011), no. 1, 5-13 (in Russian).
14. V.D. Stepanov, E.P. Ushakova. On integral operators with variable limits of integration, Proc. Steklov Inst. Math. 232 (2001), 290-309.
15. V.D. Stepanov, E.P. Ushakova. On the Geometric Mean Operator with Variable Limits of Integration, Proc. Steklov Inst. Math. 260 (2008), 254-278.
16. V.D. Stepanov, E.P. Ushakova Kernel Operators with Variable Limits Intervals of Integration in Lebesgue Speces and Applications, Math. Inequal. Appl. - 2010. -Vol. 13. - P. 449-510.
17. R. Oinarov. Boundedness and compactness of integral operators with variable integration limits in weighted Lebesgue spaces, Siberian Math. Journal. 52 (2011), no. 6, 1042-1055.