УДК 517.95

# ЛОГАРИФМДІК ЕРЕКШЕЛІГІ БАР ИНТЕГРАЛДЫҚ ОПЕРАТОРДЫ САЛМАҚТЫ БАҒАЛАУ

**Елемес Алмат Серікұлы**
almat.elemes2709@gmail.com
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ-нің 2-курс магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Абылаева А. М.

Айталық $0 < p, q < \infty$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ және $v(t), w(t) \subset L_{(0,\infty)}^{loc}$ – салмақты функциялар, мұнда $v(t) \geq 0$, $w(t) \geq 0$ $\forall t \in I$, $I = (0, \infty)$.

Өткен ғасырдың 70-ші жылдарынан бастап

$$\|vKf\|_q \le C\|wf\|_p \tag{1}$$

түріндегі әртүрлі $K$ операторлар класын салмақты бағалау қарқынды жүргізілді, мұндағы $\|\bullet\|_p$ нормасы $L_p \equiv L_p(I)$ кеңістігіндегі норма.

Жоғарыдағы $K$ операторы келесідей анықталады

$$Kf(x) = \int_0^x k(x,s) f(s) ds. \tag{2}$$

1970 – 1982 жылдар аралығындағы зерттеулер кезінде (1) түріндегі бағалауларды зерттеулерінен көруімізге болады [1]. Интегралдық операторлар үшін (1) бағалауын зерттеулер [1], [2], [3], [4] кітаптарында жинақталған. (1) түріндегі бағалау тек қана Лебег кеңістігінде ғана емес, сонымен қатар басқа функционалды кеңістіктерде қарастырылады (мысалы, [1] кітаптың 11-тарауында және [2] ).

[5] зерттеу жұмысында

$$Kf(x) = \int_0^x s^{\gamma-1} \ln \frac{x}{x-s} f(s) ds$$

операторын салмақты Лебег кеңістігінде шенелімділігі мен компактылығы алынған.

$W(x) = \int_0^x w(s) ds,\quad x > 0$ болсын. $W(x)-$ теріс емес, қатаң түрде өсетін және локальді абсолютті үзіліссіз функция [5].

Бұл зерттеу жұмысында $L_{p,w} \equiv L_{p,w}(I)$ салмақты Лебег кеңістігін $L_{q,v} \equiv L_{q,v}(I)$ салмақты Лебег кеңістігіне бейнелейтін $K_\gamma$ интегралдық операторының шенелімділігін қарастырамыз

$$K_\gamma f(x) = \int_0^x W^{\gamma-1}(s) \ln \frac{W(x)}{W(x) - W(s)} f(s) w(s) ds, \quad x \in I. \tag{3}$$

Келесі теңсіздікті зерттейміз

$$\|K_\gamma f\|_{q,v} \le C\|f\|_{p,w}, \quad \forall f \in L_{p,w}(I). \tag{4}$$

Бұл зерттеу барысында $0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ сияқты анықталмағандықтарды нөлге тең болсын деп, $A \le \beta B$ өрнегін $A << B$ түрінде жазамыз. Мұндағы $\beta$ тұрақты параметрлерге тәуелді оң тұрақты шама. Ал $A \approx B$ қатынасын $A << B << A$ түрінде болсын деп қарастырамыз.

***Көмекші нәтижелер***

$0 < s < x$, $W(s) < W(x)$ қанағаттандыратын $W(x)$ функциясы үшін төмендегі теңсіздігі орындалсын

$$\frac{W(x)}{W(x)-W(s)} > \ln\frac{W(x)}{W(x)-W(s)} > \frac{W(s)}{W(x)}, \quad x > s > 0. \tag{5}$$

Онда $\ln\frac{W(x)}{W(x)-W(s)}$ функциясы $x > s > 0$ үшін $x$ - бойынша кемімелі, ал $s$ - бойынша өспелі функция болады. Сонымен қатар $W(x)\ln\frac{W(x)}{W(x)-W(s)}$ функциясы да $x > s > 0$ үшін $x$ -бойынша кемімелі, ал $\frac{1}{W(s)}\ln\frac{W(x)}{W(x)-W(s)}$ функциясы $s$ - бойынша өспелі болады.

$K_\gamma$ операторымен қатар келесідей $H_\gamma$ операторын қарастырамыз

$$H_\gamma f(x) = \frac{1}{W(x)}\int_0^x W^\gamma(s) f(s) w(s) ds, \ x \in I.$$

$\forall f \geq 0$ үшін келесі теңсіздігі орындалады

$$K_\gamma f \geq H_\gamma f. \tag{6}$$

$H_\gamma$ операторы үшін келесі теорема орынды:

**Теорема А.** Айталық $1 < p \leq q < \infty$ болсын. Онда $L_{p,w}$ салмақты Лебег кеңістігін $L_{q,v}$ салмақты Лебег кеңістігіне бейнелейтін операторы шенелген болуы үшін $A < \infty$ болуы қажетті және жеткілікті. Сонымен қатар $\|H_\gamma\| \approx A$.

Мұндағы

$$A(x) = \left(\int_x^\infty \frac{v(t)}{W^q(t)} dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^x W^{\gamma p'}(t) w(t) dt\right)^{\frac{1}{p'}}, \quad A = \sup_{x>0} A(x).$$

***Негізгі нәтижелер***

**Теорема 1.** Айталық $1 < p \leq q < \infty$, $\gamma > \frac{1}{p'}$ болсын. Онда $L_{p,w}$ салмақты Лебег кеңістігін $L_{q,v}$ салмақты Лебег кеңістігіне бейнелейтін операторы шенелген болуы үшін $A < \infty$ болуы қажетті және жеткілікті. Сонымен қатар $\|K_\gamma\| \approx A$.

***Дәлелдеуі.*** *Қажеттілігі.* Айталық $K_\gamma$ операторы шенелген болсын. Онда (6) бойынша $H_\gamma$ операторы шенелген болады және $\|K_\gamma\| \geq \|H_\gamma\|$ орындалады. Демек, Теорема А бойынша $A < \infty$ болады және де

$$\|K_\gamma\| >> A \tag{7}$$

орындалады.

*Жеткіліктілігі.* $W$ функциясы $I$ да үзіліссіз, қатаң түрде өспелі функция және $W(0)=0$. Кез келген $k \in Z$ үшін $x_k := \sup\{x : W(x) \le 2^k, x \in I\}$ болсын. Олай болса біз $0 < x_k \le x_{k+1}, \forall k \in Z$ орындалатын $\{x_k\}_{k \in Z}$ нүктелер тізбегін аламыз. Сонымен қатар, егер $x_k < \infty$ болса, $W(x_k) = 2^k$, $x_k \le x \le x_{k+1}$ үшін $2^k \le W(x) \le 2^{k+1}$, $\int_{x_{k-1}}^{x_k} w(s)ds = 2^{k-1}$ орындалсын, және де егер $x_{k+1} = \infty$ болса, $\int_{x_k}^{x_{k+1}} w(s)ds \le 2^k$ болсын. Бұл деректерді төменде ескертусіз қолданылады.

Айталық $A < \infty$ болсын. Бізге енді

$$\|K_\gamma f\|_{q,v} << A\|f\|_{p,w}, \quad \forall f \in L_{p,w} \tag{8}$$

теңсіздігінің орындалатындығын көрсетсек жеткілікті. (8) теңсіздігі арқылы $\|K_\gamma\| << A$ орындалатынын аламыз. Олай болса, (7) теңсіздігі арқылы

$$\|K_\gamma\| \approx A$$

эквиваленттілігі орындалады.

$f \ge 0$ болсын. $I = \bigcup_k I_k$ қатынасын пайдалана отырып, келесі орындалады

$$\|K_\gamma f\|_{q,v}^q = \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} v(x)\left(\int_0^x W^{\gamma-1}(s)\ln\frac{W(x)}{W(x)-W(s)} f(s)w(s)ds\right)^q dx$$

$$<< \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} v(x)\left(\int_0^{x_{k-1}} W^{\gamma-1}(s)\ln\frac{W(x)}{W(x)-W(s)} f(s)w(s)ds\right)^q dx$$

$$+ \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} v(x)\left(\int_{x_{k-1}}^{x} W^{\gamma-1}(s)\ln\frac{W(x)}{W(x)-W(s)} f(s)w(s)ds\right)^q dx := J_1 + J_2.$$

Енді біз $J_1$ және $J_2$ бөлек бағалаймыз. $J_1$ бағалауда, $x > s \ge 0$ үшін $\frac{1}{W(s)}\ln\frac{W(x)}{W(x)-W(s)}$ функциясының $x$ және $s$ бойынша монотондылығын қолдана отырып келесі өрнегін аламыз

$$J_1 \le \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} v(x)\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)^q 2^{2q}(\ln 2)^q \left(\int_0^{x_{k-1}} W^\gamma(s) f(s)w(s)ds\right)^q dx.$$

Әрі қарай $x_k \le x \le x_{k+1}$ үшін $2^k \le W(x) \le 2^{k+1}$ теңсіздігінен $\frac{1}{2^{k+1}} \le \frac{1}{W(x)}$ теңсіздігінің шығатынын қолданамыз

$$= 4^q (\ln 2)^q \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} v(x) \left( \frac{1}{W(x)} \right)^q \left( \int_0^{x_{k-1}} W^\gamma(s) f(s) w(s) ds \right)^q dx$$

$$<< \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{v(x)}{W^q(x)} \left( \int_0^x W^\gamma(s) f(s) w(s) ds \right)^q dx = \| H_\gamma f \|_{q,v}^q. \tag{9}$$

(7) өрнегіне Теорема А қолданып, келесі теңсіздігін аламыз

$$J_1 << A^q \| f \|_q^q. \tag{10}$$

Енді $J_2$ өрнегін қарастырамыз

$$J_2 = \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} v(x) \left( \int_{x_{k-1}}^x W^{\gamma-1}(s) \ln \frac{W(x)}{W(x)-W(s)} f(s) w(s) ds \right)^q dx$$

$p$, $p'$ параметрлері бойынша Гельдер теңсіздігін қолданып, $W(s) = W(x)t$ алмастыруын жасайтын болсақ

$$\le \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} v(x) \left( \int_0^x W^{p'(\gamma-1)}(s) \ln^{p'} \frac{W(x)}{W(x)-W(s)} w(s) ds \right)^{\frac{q}{p'}} dx \left( \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f^p(s) w(s) ds \right)^{\frac{q}{p}}.$$

$$= \beta^{\frac{q}{p'}} \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} v(x) W^{q(\gamma-1)+\frac{q}{p'}}(x) dx \left( \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f^p(s) w(s) ds \right)^{\frac{q}{p}}$$

$$<< \sum_k \left( \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f^p(s) w(s) ds \right)^{\frac{q}{p}} 2^{(k+1)(q\gamma+\frac{q}{p'})} \cdot \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{v(x)}{W^q(x)} dx$$

$$= 4^{q\left(\gamma+\frac{1}{p'}\right)} \sum_k \left( \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f^p(s) w(s) ds \right)^{\frac{q}{p}} 2^{(k-1)\frac{q}{p'}(p'\gamma+1)} \cdot \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{v(x)}{W^q(x)} dx$$

$$<< \sum_k \left( \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f^p(s) w(s) ds \right)^{\frac{q}{p}} W^{\frac{q}{p'}(p'\gamma+1)}(x_{k-1}) \cdot \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{v(x)}{W^q(x)} dx.$$

$$<< \sum_k \left( \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f^p(s) w(s) ds \right)^{\frac{q}{p}} \left( \int_0^{x_k} W^{p'\gamma}(t) w(t) dt \right)^{\frac{q}{p'}} \cdot \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{v(x)}{W^q(x)} dx$$

$$\leq \sum_k \left( \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f^p(s) w(s) ds \right)^{\frac{q}{p}} \left[ \left( \int_0^{x_k} W^{p'\gamma}(t) w(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_{x_k}^{\infty} \frac{v(x)}{W^q(x)} dx \right)^{\frac{1}{q}} \right]^q$$

$$= \sum_k \left( \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f^p(s) w(s) ds \right)^{\frac{q}{p}} \cdot A^q$$

$q > p$ және $\frac{q}{p} > 1$ болғандықтан Йенсен теңсіздігі бойынша,

$$= A^q \left( \sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f^p(s) w(s) ds \right)^{\frac{q}{p}} \leq A^q \left( \int_0^{\infty} f^p(s) w(s) ds \right)^{\frac{q}{p}} = A^q \|f\|_{p,\omega}^q .$$

$$J_2 << A^q \|f\|_{p,\omega}^q . \qquad (11)$$

Осыдан (10) және (11) өрнектері бойынша, $\|K_\gamma\| << A$ орындалады. Теорема толығымен дәлелденді.

**Қолданылған әдебиеттер тізімі**


1. D.E.Edmunds, V.Kokilashvili and A.Meskhi. Bounded and compact integral operators. Kiluwer Academic Published. Boston / Dordrecht / London.
2. S.M.Farsani. On the boundedness and compactness of the fractional Riemann Liouville operators.Sibirsk.Mat.Zh.54(2013), No.2,468-479(inRussian);translation in Sib. Math. J. 54 (2013), No.2, 368-378.
3. E.M.Dynkin and B.P.Osilenker. Weighted estimates for singular integrals and their applications. Mathematical analysis. Vol.21, 42-129, Itog: Nauki i Tekhniki, Acad. Nauk. SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nouchn. Inform., Moscow, 1982.
4. A.Meskhi. Solution of some weight problems for the Riemann - Liouville and Weil operators. Georgian Math. J. 5 (1998), No.6, 565 - 574.
5. A. Abylayeva and L.-E. Persson. Hardy type inequalities and compactness of a class of integral operators with logarithmic singularities. Math. Inequal. Appl. (MIA), V.21, № 1, 2018, P.201-215.