УДК 517.52

ОБ ОЦЕНКЕ ОБОБЩЕННОЙ ДРОБНО-МАКСИМАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Әбек Ажар Нартайқызы
azhar_18@inbox.ru, azhar.abekova@gmail.com
докторант 1-го курса ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научные руководители – Н.А. Бокаев, А.Гогатишвили

В данной работе определяется обобщенная дроб-максимальная функция.
Сначала приведем необходимые определения и обзначения.

Определение 1 [1].1 Отображение $\rho: L_0^+ \to [0,\infty]$ называется функциональной нормой (кратко: ФН), если для всех $f, g, f_n \in L_0^+,\ n \in N$ выполнены условия:

$(P1)$ $\rho(f) = 0 \Rightarrow f = 0,\ \mu-$ почти всюду (кратко: $\mu-$ п.в);

$\rho(\alpha f) = \alpha\rho(f), \alpha \geq 0; \rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g)$ (свойства нормы);

$(P2)$ $f \leq g$, $(\mu -$ п.в.$) \Rightarrow \rho(f) \leq \rho(g)$ (монотонность нормы);

$(P3)$ $f_n \uparrow f \Rightarrow \rho(f_n) \to \rho(f)(n \to \infty)$ (свойство Фату);

$(P4)$ $0 < \mu(\sigma) < \infty \Rightarrow \int_\sigma f d\mu \leq c_\sigma \rho(f)$, $f \in L_0^+$. (Локальная интегрируемость);

$(P5)$ $0 < \mu(\sigma) < \infty \Rightarrow \rho(\chi_\sigma) < \infty$ (конечность ФН для характеристических функций (χ_σ) множеств конечной меры).

Здесь $f_n \uparrow f$ означает, что $f_n \leq f_{n+1}, \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ $(\mu -$ п.в)

Определение 2 [2]. Пространство $X \epsilon L_0(R^n)$ называется идеальным пространством, если будет удовлетворять следующим условиям:

(B1) $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ_n- п.в., $\|\alpha f\| = \alpha\|f\|$, $\alpha \geq 0$;
$\exists C\epsilon[1,\infty)$: $\|f + g\| \leq C(\|f\| + \|g\|)$; (1)
(B2) $0 \leq f \leq g$ (μ_n- п.в.) $\Rightarrow \|f\| \leq \|g\|$;
(B3) $0 \leq f_m \uparrow f$ (μ_n- п.в.) $\Rightarrow \|f_m\| \uparrow \|f\|$;
(B4) $\|f\| < \infty \Rightarrow |f| < \infty$ (μ_n- п.в.); (1’)

В (1) неравенстве треугольников при $C = 1$ пространство X будет нормированным, а при $C > 1$ квази-нормированным пространством.

Банахово-функциональное пространство (БФП) удовлетворяет свойствам (B1)-(B3) с $C = 1$ в неравенстве (1), свойство (B4) заменяется более строгим предположением:

(B4)’ $\Omega\epsilon R^n$, $|\Omega| \equiv \mu_n(\Omega) < \infty \Rightarrow \int_\Omega |f|\, d\mu_n \leq c_\Omega \|f\|$,

а дополнительное свойство имеет место:

(B5) $\Omega\epsilon R^n$, $|\Omega| \equiv \mu_n(\Omega) < \infty \Rightarrow \|\chi_\Omega\| < \infty$,

Определение 3.2 Пусть ρ есть ФН. Множество $X = X(\rho)$ функций из L_0, для которых $\rho(|f|) < \infty$ называется БФП, порожденным ФН ρ. Для $f \in X$ полагаем

$$\|f\|_X = \rho(|f|).$$

Пример 1. Пусть $S = R^n$, $\mu \equiv \mu_n$-мера Лебега в R^n, $1 \leq p \leq \infty; u \in L_0(R^n)$, $0 < u < \infty$, $(\mu -$п.в); $u \in L_p^{loc}(R^n)$, $\frac{1}{u} \in L_{p'}^{loc}(R^n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Пространство $X = L_{p,u}(R^n)$ с нормой $\|f\|_X = \|fu\|_{L_p}$ т.е.

$$\|f\|_X = \left(\int_{R^n} |f\, u|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty; \quad \|f\|_X = \|f\, u\|_{L_\infty}, \quad p = \infty$$

является БФП.

Обозначим для $f \in L_0$

$$\lambda_f(y) = \mu\{x \in S : |f(x)| > y\}, \quad y \in [0,\infty) \tag{2}$$

-Лебегова функция распределения. Через $\dot{L}_0$ обозначим множество функций $f \in L_0$ для которых $\lambda_f(y)$ не тождественна бесконечности, т.е. $\exists y_0 \in [0,\infty)$: $\lambda_f(y_0) < \infty$. Для

$f \in \dot{L}_0$ введем убывающую перестановку f^* как правую обратную функцию к убывающей функции λ_f, т.е.

$$f^*(t) = \inf\{y \in [0,\infty): \quad \lambda_f(y) \le t\}, \quad t \in R_+ = (0,\infty) \tag{3}$$

Известно, что $0 \le f^* \downarrow$; $f^*(t+0) = f^*(t)$, $t \in R_+$; f^* равноизмерима с $|f|$, т.е. $\mu_1\{t \in R_+ : f^*(t) > y\} = \lambda_f(y)$, $y \in [0,\infty)$ кроме того, для $f \in \dot{L}_0$ имеем: $\lambda_f(y) \to 0$, $(y \to +\infty) \Leftrightarrow |f(x)| < \infty$, $(\mu -$п.в.$)$ на S. Определим отношения порядка для функций из $\dot{L}_0^+$:

$$1) \quad f \prec g \Leftrightarrow f^*(t) \le g^*(t); \quad t \in (0,\mu(S)) \tag{4}$$

$$2) \quad f \prec g \Leftrightarrow \int_0^t f^* d\tau \le \int_0^t g^* d\tau; \quad t \in (0,\mu(S)) \tag{5}$$

Отношение порядка (5) подчинено отношению (4); оба они подчинены поточечной оценке μ-п.в.. Эквивалентность функций в смысле отношения (4) означает их равноизмеримость.

Определение 4. 3 Пусть ρ есть ФН. Скажем, что ρ согласована с отношением порядка $\prec$, если для $f,\ g \in L_0^+$, $f \prec g$ имеем $\rho(f) \le \rho(g)$.

Отметим, что по свойству $(P2)$ любая ФН согласована с поточечной оценкой:

$$f \le g \quad (\mu - \text{п.в.}) \Rightarrow \rho(f) \le \rho(g). \tag{6}$$

Определение 5.4 ФН ρ называется перестановочно инвариантной, если

$$f^* \le g^* \Rightarrow \rho(f) \le \rho(g). \tag{7}$$

БФП $X = X(\rho)$, порожденное перестановочно инвариантной ФН ρ, будем называть перестановочно инвариантным пространством (кратко: ПИП).

Примерами ПИП служат пространства Лебега $L_p(R^n)$, пространства Лоренца, Орлича.

Для измеримой функции $f: R^n \to R$ обозначим через $f^{\#}$ симметрическую перестановку функции, т.е. радиально симметричную неотрицательную функцию, убывающую и непрерывную справа как функция сферического радиуса $\rho = |x|$ и равноизмеримую с f. Известна формула, связывающая убывающую перестановку f^* и симметрическую перестановку $f^{\#}$. Именно,

$$f^{\#}(x) = f^*(V_n |x|^n), \tag{8}$$

где V_n - объем шара единичного радиуса. А именно $\lambda_{f^*} = \lambda_f$, более того

$f^{\#}(x) = f_0(|x|),\ 0 \le f_0(\rho) = f^*(V_n\rho_n) \downarrow,\ \rho \in R_+$.

Определение 6.5 Идеальное пространство $\mathrm{E} = \mathrm{E}(\mathrm{R}^n) \subset \mathrm{L}_0(\mathrm{R}^n)$ называется обобщенно перестановочным инвариантным пространством (ОПИП), если выполняются следующие дополнительные предложения:

1. (Квази)норма $\|\cdot\|_{E(R^n)}$ зависит только от симметричной перестановки функций: а именно

$$\|f\|_{E(R^n)} = \|f^{\#}\|_{E(R^n)}$$

2. E имеет дополнительные свойства:

(P6) $\Omega \in R^n$, $|\Omega| \equiv \mu_n(\Omega) < \infty \Rightarrow \varphi_E(|\Omega|) \coloneqq \|\chi_\Omega\|_E < \infty$;

(P7) $\|\sigma_{\mathrm{m}}\|_{E\to E} < \infty, m \in (1;\infty)$; $\sigma_{\mathrm{m}}(f)(y) = f(m^{-1}y), y \in R^n$,

здесь φ_E называется фундаментальной функцией для ОПИП $E = E(R^n)$, σ_{m}- оператор расширения.

Пример 2. Пусть $0 < p \le \infty$; $v \in L_0(R^n), 0 < v < \infty$ п.в. в R^n.

$$L_{p,v} = \left\{ f \in L_0(R^n) \colon \|f\|_{L_{p,v}} = \left(\int_{R^n} |fv|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, 0 < p < \infty$$

$$L_{\infty,v} = \{ f \in L_0(R^n) \colon \|f\|_{L_{\infty,v}} = \|fv\|_{L_\infty(R^n)} < \infty \},\ \ p = \infty$$

тогда $E = L_{p,v}$ идеальное пространство в R^n.

Введем подпространство в $L_0 \equiv L_0(R^n)$ и в $\dot{L_0} \equiv \dot{L_0}(R^n)$: GM_{EF} – обобщенное глобальное пространство Морри, LM_{EF} – обобщенное локальное пространство Морри, M_{EF} – пространство типа Морри. Соответсвенно:

$GM_{EF} = \left\{ f \in L_0 \colon \|f\|_{GM_{EF}} = \sup_{x \in R^n} \left\| \|f\|_{E(B(x,t))} \right\|_F < \infty \right\}$;

$LM_{EF} = \left\{ f \in L_0 \colon \|f\|_{LM_{EF}} = \left\| \|f\|_{E(B_t)} \right\|_F < \infty \right\}$;

$M_{EF} = \left\{ f \in L_0 \colon \|f\|_{LM_{EF}} = \left\| \|f^{\#}\|_{E(B_t)} \right\|_F < \infty \right\}$;

Здесь $B(x,t) = \{ y \in R^n \colon |y - x| < t \}$, $B_t = B(0,t)$, $|B_t| = v_n t^n$. Мы используем обозначения

$\|f\|_{E(B(x,t))} \coloneqq \left\| f\chi_{B(x,t)} \right\|_E$, $\|f^{\#}\|_{E(B_t)} \coloneqq \left\| f^{\#}\chi_{B_t} \right\|_E$.

Лемма 1. Пусть $F = F(R_+)$ идеальное пространство, а $E = E(R^n)$ обобщенное перестановочно инвариантное пространство, $f^{\#}$ - симметрическая перестановка. Тогда имеет место соотношение:

$$\left\| \|f^{\#}\|_{E(B_t)} \right\|_F \approx \sup_{x \in R^n} \left\| \|f^{\#}\|_{E(B(x,t))} \right\|_F$$

Определение 7. Функция $\mathrm{M}_\rho \mathrm{f(x)}$ называется обобщенно дробно-максимальной функцией

$$M_\rho f(x) = \sup_{t > 0} \frac{\rho(t)}{t^n} \int_{B(x,t)} f(y) dy$$

где $B(x,t)$ это шар с центром в точке x и радиусом t. При $\rho(x) = |x|^\alpha$, $\alpha \in [0, n)$ получаем классическую дробно-максимальную функцию $M_\alpha f$.

Лемма 2. Пусть $\rho(\mathrm{r}) = \mathrm{r}^{\mathrm{n}} \Phi(\mathrm{r}) \uparrow$, $\Phi(\mathrm{r}) \downarrow$-квази монотонная функция. $M_\rho f(x)$ обобщенно дробно-максимальная функция, G-ядро отображения, свертка $G * f$ определяется интегралом

$$(G * f)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{R^n} G(x - y) f(y) dy$$

Тогда имеет место следующее неравенство:

$M_\rho f(x) \lesssim (G * f)(x)$.

Теорема 1. Пусть ρ – возрастающая функция определенная на R_+. $\Phi(r) \downarrow$ – квази-убывающая монотонная функция. Тогда для обощенной дробно-максимальной функции $M_\rho f(x)$

выполняются оценки:

$$\left(M_\rho f\right)^*(t) \le c \sup_{s \ge t} \frac{\rho\left(s^{1/n}\right)}{s} \int_0^s f^*(\tau) d\tau$$

$$\left(M_\rho f^\#\right)^*(t) \ge c_2 \sup_{s \ge t} \frac{\rho\left(s^{1/r}\right)}{s} \int_0^s f^*(r) dr.$$

Список использованных источников

1. C.Bennett, R.Sharpley, Interpolation of operators. Pure and applied mathematics, Volume 129. Boston, MA: Acad. Press Inc., 1988.

2. M.L. Goldman, E.G. Bakhtigareeva Application of general approach to the theory of Morrey-type spaces // Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2019.

3. M.L. Goldman, E.G. Bakhtigareeva Some classes of operators in general Morrey-type spaces // Eurasian Mathematical Journal, Volume 11, №4, 2020, p.35-44.

4. R.Ch. Mustafayev, N.Bilgicli Generalized fractional maximal functions in Lorentz spaces Λ // Journal of Mathematical Inequalities, Volume 12, №3, 2018, p.827-851.