УДК 517.956.223

КӨЛБЕУ ТУЫНДЫСЫ БАР ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕПТІ СИНГУЛЯРЛЫ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУГЕ КЕЛТІРУ

Әлімбай Ақерке Жұмаханқызы
Alimbai98@bk.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ-нің 2-курс магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Кошкарова Б. С.

Бұл жұмыста ізделінетін функция мен қоса оның бірінші ретті туындысы кіретін шекаралық шарты бар екінші ретті эллиптикалық теңдеу үшін есепті қарастырамыз. Мұндай есеп көлбеу туындысы бар шекаралық есеп деп аталады. Оларды алғаш рет А. Пуанкаре толқындар теориясына байланысты қарастырды.

В **есебінің қойылуы** [1]. D - R^2-дегі кейбір бір байланысты кеңістік болсын. D облысында

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+a(x,y)\frac{\partial V}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial V}{\partial y}=f(x,y) \tag{1}$$

теңдеуді және

$$\alpha(t)\frac{\partial V}{\partial x}-\beta(t)\frac{\partial V}{\partial y}=\gamma(t), \quad t\in\Gamma=\partial D \tag{2}$$

шекаралық шартты қанағаттандыратын $V(x,y)$ шешімін табу қажет.

Осындай типті есептерді зерттеу қызығушылық тудырады, себебі олар классикалық жағдайларға жатпайды. Бұл есептерде классикалық потенциалдар әдісін қолдану, әдетте Фредгольмның қарапайым альтернативасы сақталмайтын сингулярлы интегралдық теңдеуге әкеледі [2]. Ең толық нәтижелер сингулярлы интегралдық теңдеулерді қолдану арқылы екі тәуелсіз айнымалы жағдайдағы аналитикалық коэффициенттері бар теңдеулер үшін алынды [3], [4]. И.Н. Векуаның және оның ізбасарлардың жұмыстарында B есебі осы есептің берілгендерге ең аз шектеулерді талап ететін кең кластар үшін зерттелген [1], [5]. Олардың зерттеулердің негізінде ізделінетін функцияның туындыларын

$$u(x,y)=\frac{\partial V}{\partial x},\ \ v(x,y)=-\frac{\partial V}{\partial y} \tag{3}$$

мына теңдіктер ауыстыру арқылы B есебін жалпыланған аналитикалық функциялар үшін шекаралық есепке түрлендіру жатады. Онда біз мынадай жаңа есеп аламыз

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+a(x,y)u-b(x,y)v=f(x,y), \tag{4}$$

$$\alpha(t)u(t)+\beta(t)v(t)=\gamma(t),\ t\in\Gamma=\partial D. \tag{5}$$

Енді комплексті мәнді $w=u+iv$ функциясын енгізе отырып, (4)-(5) есептің орнына И.Н. Векуа мағынасында жалпыланған аналитикалық функциялар үшін A есебі деп аталатын есеп пайда болады:

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}+\frac{1}{4}(a+ib)w+\frac{1}{4}(a-ib)\overline{w}=\frac{1}{2}f, \tag{6}$$

$$\mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}w(t)=\gamma(t),\lambda=\alpha+i\beta,t\in\Gamma=\partial D. \tag{7}$$

Бұл жұмыста біз (6)-(7) есепті $C^{0.\mu}_{k,\lambda}$ салмақты Гельдер класында шешімін әрі қарай зерттеуге мүмкіндік беретін сингулярлы интегралдық теңдеуге келтіреміз. Сол арқылы осы есептің берілгендерге қойылатын талаптарды одан әрі жеңілдетеміз. Осы мақсатында біз А.Игликов құрастырған әдісті қолдандық. Бұл әдісі бойынша алдымен годограф түрлендіру көмегімен қосымша есепке көшеміз [6]. Айталық, (6) теңдеудің $w=w(z)$ шешімі кем дегенде аз төңірегінде D облысты $w=u+iv$ жазықтығының G облысына, яғни $G=w(D)$, бір парақты бейнелеуді жасайды, мұнда түрлендіруінің якобианы $J_w>0$. $z=z(w)$ арқылы кері функцияны белгілейік және комплексті айнымалылар бойынша жалпыланған туындылардың байланысты ескере отырып, (6) теңдеудің орнына сызықты емес теңдеу алынады:

$$\frac{\partial z}{\partial \overline{w}}=\frac{2g(z,w)\dfrac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{w}}}{1+\sqrt{1+4|g|^2\left|\dfrac{\partial z}{\partial w}\right|^2}}\cdot\frac{\partial z}{\partial w}, \tag{8}$$

мұндағы $g(z,w)=\frac{1}{2}f-\frac{1}{4}(a+ib)w-\frac{1}{4}(a-ib)\overline{w}$, ал, (7) шекаралық шарты кері функция үшін канондық түрде былай жазылады [1]:

$$\mathrm{Re}[w^{-n}z(w)]=\gamma(w),\quad w\in\Gamma=\partial G. \tag{9}$$

Жалпылықты жоғалтпай, G облысын бірлік радиусты шеңбер деп есептеуге болады.

[1] жұмыста (9) шартты қанағаттандыратын функциялардың интегралдық көрінісі келесі түрде алынды:

$$z(w) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \left(\frac{\rho(\zeta)}{\zeta - w} + \frac{w^{2n+1}\overline{\rho(\zeta)}}{1 - w\overline{\zeta}}\right) d\xi d\eta + \frac{w^n}{2\pi i}\int_\Gamma \gamma(t)\frac{t+w}{t-w}\frac{dt}{t} + \sum_{k=0}^{2n} c_k w^k, \qquad (10)$$

мұндағы c_κ - комплексті тұрақтылар.

(10)-ның көмегімен (8)-(9) есебін $\rho(w)$ белгісіз тығыздығы бар облыс бойынша сингулярлы интегралдық теңдеуге келтіруге болады. Ол үшін (10)-дағы $z = z(w)$ функциясының дербес туындыларын табамыз:

$$\frac{\partial z}{\partial \overline{w}} = \rho(w), \qquad (11)$$

$$\frac{\partial z}{\partial w} = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\rho(\zeta)}{(\zeta - w)^2} d\xi d\eta - \frac{(2n+1)w^{2n}}{\pi}\iint_G \frac{\overline{\rho(\zeta)}}{1 - w\overline{\zeta}} d\xi d\eta - \frac{w^{2n+1}}{\pi}\iint_G \frac{\overline{\rho(\zeta)}}{\left(1 - w\overline{\zeta}\right)^2} d\xi d\eta + \Phi'(w). \qquad (12)$$

(8)-ге (11) және (12)-ні қойып $\rho(w)$ функциясы үшін келесі сингулярлы интегралдық теңдеуді аламыз:

$$\rho(w) = S\rho(w), \qquad (13)$$

мұндағы

$$S\rho(w) = \frac{2g(z,w)\overline{U\rho(w)}}{1 + \sqrt{1 + 4|g|^2|U\rho(w)|^2}} \cdot U\rho(w). \qquad (14)$$

Мұнда $U\rho(w)$ операторы келесідей түрге ие:

$$U\rho(w) \equiv \Pi\rho(w) + (2n+1)w^{2n}\mathrm{T}_1\rho(w) + w^{2n+1}\Pi_1\rho(w) + \Phi'(w).$$

$\Pi\rho(w)$, $\mathrm{T}_1\rho(w)$, $\Pi_1\rho(w)$ және $\Phi'(w)$ арқылы келесі белгілеулер енгізілген:

$$\Pi\rho(w) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\rho(\zeta)}{(\zeta - w)^2} d\xi d\eta, \quad \mathrm{T}_1\rho(w) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\overline{\rho(\zeta)}}{1 - w\overline{\zeta}} d\xi d\eta,$$

$$\Pi_1\rho(w) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\overline{\rho(\zeta)}}{\left(1 - w\overline{\zeta}\right)^2} d\xi d\eta,$$

$$\Phi'(w) = \frac{nw^{n-1}}{2\pi i}\int_\Gamma \gamma(t)\frac{t+w}{t-w}\frac{dt}{t} + \frac{w^n}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\gamma(t)}{(t-w)^2} dt + \sum_{k=0}^{2n} kc_k w^{k-1}.$$

Сонымен, келесі теорема орынды.

Теорема. (13) сызықты емес сингулярлы интегралдық теңдеудің шешімі (8)-(9) шекаралық есептің шешімімен пара пар.

Дәлелдеуі. Расында, егер (13) сингулярлы интегралдық теңдеудің шешімі бар болса, онда оны (10)-ға қоя отырып, (8)-(9) шекаралық есептің шешімін аламыз. Керісінше, егер $z = z(w)$ функциясы (8)-(9) шекаралық есептің шешімі болса, онда (11) формула бойынша (13) сингулярлы интегралдық теңдеудің шешімі болатын $\rho(w)$ функциясын аламыз.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988, 512 с.
2. Миранда К. Уравнение с частными производными эллиптического типа. – М.: ИЛ, 1957, 256 с.
3. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. – М.: Гостехиздат, 1948, 296 с.
4. Хведелидзе Б.В. Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения // Тр. Тбил. мат. ин-та, 1956, Т. 23, С. 3-158.
5. Монахов В.Н. Краевые задачи и свободными границами для элиптических систем уравнений. – Новосибирск: Наука, 1977, 424 с.
6. Игликов А. Краевые задачи со свободной границей для систем уравнений движения несжимаемой идеальной жидкости. Вихревые кольца. – Алматы: Ғылым, 1995, 43 с.