УДК 519-644

ҚАТТЫ ТЕРБЕЛМЕЛІ ФУНКЦИЯЛАРДЫ САНДЫҚ ИНТЕГРАЛДАУДЫҢ ЕРЕКШЕЛІГІ ТУРАЛЫ

Жамалбек Талшын Қайратқызы
k_talshin@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ Механика-математика факультетінің 7М05401-Математика мамандығының 2 курс магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Наурызбаев Н.Ж.

«*Негізгі математикалық модельдерге соңғы екі мыңжылдықта математика тарихында орталық және үнемі қайталанып жүретін тақырыптардың бірі – интеграл ұғымы кіреді*» ([1], 199-200 беттер). Шынында да, интеграл – классикалық «шексіз» объект, оны белгілі бір мағынада ақырлы объектілермен жуықтау теориялық және қолданбалы математиканың көптеген зерттеулерінің мазмұны болып табылады. Оның айрықша маңыздылығы В. П. Хавин мына сөздерінен көруге болады ([2], 276 бет): *«“Интеграл не үшін қажет?” деген сұрақтың “Математика не үшін қажет?” деген сұрақтан айырмашылығы жоқ, себебі математика қолданылатын барлық жерде интеграл да қолданылады».* Квадратуралық (көп өлшемді жағдайда кубатурлық деп те аталады) формулалар (мысалы, [3]-[11] қараңыз) келесі қойылымда зерттеледі.

Айталық, N және s $(N, s = 1,2, \dots)$ сандары және s-өлшемді $\Omega = \Omega^s \subset R^s$ Жордан бойынша өлшемді жиыны берілсін және $t_k \in \Omega$ $(k = 1,2, \dots, N), t = (t_1, \dots, t_N)$ болсын.

$$\delta_N(F, \Phi_N) = \inf_{\phi_N \in \Phi_N} \inf_{t} \sup_{f \in F} \left| \int_\Omega f(x)dx - \phi_N\big(f(t_1), \dots, f(t_N)\big) \right|, \qquad (1)$$

мұндағы, $\Phi - \phi_N$ функцияларының белгілі бір тобы, F – Ω_s- те анықталған қандай да бір сандық функциялар жиыны. Белгілі болғандай, қарапайым жағдайда F класстары дөңес және центрге қатысты симметриялы болғанда (1)-де Φ_N – ді барлық $\phi_N(\tau_1, \dots, \tau_N) = \sum_{k=1}^{N} a_k \tau_k$ сызықты функциялар жиынына ауыстырсақ, онда inf өзгермейді. Тиісінше, соңғы қосынды

$$\Lambda_N(f; t, a) \equiv \sum_{k=1}^{N} a_k f(t_k) \tag{2}$$

квадратуралық формула деп аталады, $a = (a_1, \dots, a_N) \in R^N$ және t жүйелері, сәйкесінше, оның *салмақтары және түйіндері* болып табылады. (2) қосынды үшін (1) шамасы F класының тегіне байланысты, бұл жағдайда $f(t_k)$ мәндері f функциясының t_k маңайындағы өзгерісін сипаттайды. Алайда, интеграл астындағы функция $g(x)h(x)$ түрінде болса, егер h жылдам тербелмелі функция болса, онда g тегіс функция болған жағдайдың өзінде де, (2)-дегі $g(t_k)h(t_k)$ мәндері t_k маңайында, ол қаншалықты аз болса да $\int_{\Omega} g(x)h(x)$ интегралын жуықтап есептеу үшін $f(x)h(x)$ функциясының өзгеру тәртібін жеткілікті түрде сипаттай алмайды. Сондықтан интегралдардың бұл түрі үшін

$$\int_{\Omega} g(x)h(x)$$

квадратуралық формулаларды қолдану үшін «осцилляция теориясын» құрайтын басқа да әдістер қарастыру қажет.

[12] мақаласында осы теорияға қатысты жаңа көзқарас ұсынылды.

Теорема А [12]. $\nu_j^{(0)} \geq 0$ $(j = 1,2, \dots, s)$ *бүтін сандары берілсін және барлық бүтін* $\nu_j \geq \nu_j^{(0)}$ *сандары үшін келесі шарттарды қанағаттандыратындай* $\left\{\lambda_{n_j}^{(\nu_j)}(j)\right\}$ *сандық тізбектері берілсін: 1)* $\lambda_{n_j}^{(\nu_j)}(j) = \lambda_{-n_{-j}}^{(\nu_j)}(j)$ $(n_j = 1,2, \dots)$; *2) барлық* $n_j \geq 2^{\nu_j - 1}$ *үшін* $\lambda_{n_j}^{(\nu_j)}(j) = 0$; *3)* $\lim_{\nu_j \to \infty} \lambda_{n_j}^{(\nu_j)} = 1$; *4)* $\sum_{\nu_j > \nu_j^{(0)}} \left| \lambda_{n_j}^{(\nu_j)} - \lambda_{n_j}^{(\nu_j - 1)} \right| < +\infty$ $(n_j \in Z)$.

$h_j(x_j)$ $(j = 1, \dots, s)$ жылдам тербелмелі функциялары арқылы анықталған $h(x) = \prod_{j=1}^{s} h_j(x_j)$ *функциясы мен әр айнымалы үшін 1-периодты және* R^s*-те үзіліссіз* $g(x)$ *функциясы үшін келесі теңдік орынды*

$$\int_{[0,1]^s} g(x)h(x)dx - Q_\Lambda =$$

$$= \sum_{\substack{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z^s \setminus \Omega: \\ \nu_j \geq \nu_j^{(0)}}} \sum_{\substack{(\tau_1, \dots, \tau_s) \in Z^s \\ -2^{\nu_1 - 1} < \tau_j \leq 2^{\nu_1 - 1}}} \left(\prod_{j=1}^{s} \mu_{\nu_j}(h, \tau_j) \right) \sum_{(t_1, \dots, t_s) \in Z^s} \hat{g}(2^{\nu_1} t_1 + \tau_1, \dots, 2^{\nu_s} t_s + \tau_s),$$

мұндағы

$$Q_{\Lambda} = \sum_{(\nu_1,\dots,\nu_s)\in\Lambda} \frac{1}{2^{\nu_1+\cdots+\nu_s}} \sum_{\substack{\tau=(\tau_1,\dots,\tau_s)\in Z^s: \\ |\tau_l|\le 2^{\nu_l-1} \\ (j=1,\dots,s)}} \int_{[0.1]^s} h(x)e^{2\pi i(\tau,x)}dx \times$$

$$\times \sum_{\substack{\tau=(\tau_1,\dots,\tau_s)\in Z^s: \\ |\tau_l|\le 2^{\nu_l-1} \\ (j=1,\dots,s)}} \int_{[0.1]^s} g(x)e^{2\pi i(\tau,x)}dx \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1-1}} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s-1}} \prod_{j=1}^{s} \mu(\tau_j,k_j,\nu_j) e^{-2\pi i\frac{\tau_j k_j}{2^{\nu_j}}} g\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\dots,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right),$$

$$\mu(\tau_j,k_j,\nu_j) = ({\lambda_{\tau_j}}^{(\nu_j)} - sgn(\nu_j - {\nu_j}^{(0)}))(1+(-1)^{k_j}\cdot \lambda_{\tau_j}^{\nu_j-1}),$$

$$\mu_{\nu_j}^{\nu_j}(h,\tau_j)$$
$$= \begin{cases} \left[\lambda_{\tau_j}^{(\nu_j)} - sgn\left(\nu_j-\nu_j^{(0)}\right)\lambda_{\tau_j}^{(\nu_j-1)}\right]\hat{h}_j(\tau_j), & |\tau_j| < 2^{\nu_j-2}, \\ \lambda_{\tau_j}^{(\nu_j)}\hat{h}_j(\tau_j) - sgn\left(\nu_j-\nu_j^{(0)}\right)\lambda_{\tau_j - sgn\,\tau_j 2^{\nu_j-1}}^{(\nu_j-1)}\hat{h}_j(\tau_j - sgn\,\tau_j\, 2^{\nu_j-1}), & 2^{\nu_j-2} < |\tau_j| < 2^{\nu_j-1}, \\ \lambda_{-2^{\nu_j-1}}^{(\nu_j)}\hat{h}_j(-2^{\nu_j-1}) + \lambda_{2^{\nu_j-1}}^{(\nu_j)}\hat{h}_j(2^{\nu_j-1}) - sgn\left(\nu_j-\nu_j^{(0)}\right)\lambda_0^{(\nu_j-1)}\cdot\hat{h}_j(0), & \tau_j = 2^{\nu_j-1}, \\ \lambda_{\tau_j}^{(\nu_j)}\hat{h}_j(\tau_j) - sgn\left(\nu_j-\nu_j^{(0)}\right)\left(\lambda_{\tau_j}^{(\nu_j-1)}\hat{h}_j(\tau_j) + \lambda_{-\tau_j}^{(\nu_j-1)}\hat{h}_j(-\tau_j)\right), & \tau_j = \pm 2^{\nu_j-2}, \end{cases}$$

$$\hat{h}_j(\tau_j) = \int_0^1 h_j(x_j)e^{-2\pi i\tau_j x_j}dx_j \ \ (j=1,\dots,s), \qquad \hat{g}(m) = \int_{[0,1]^s} g(x)e^{-2\pi i(m,x)}.$$

Бұл мақала осы төңірегіндегі мәселелерге арналған.

Теорема 1. *Айталық* $s = 1,2,\dots$ *және* $r > \frac{1}{2}$ *сандары берілсін және* $h(x) = \prod_{j=1}^{s} h_{n_j}(x_j) = \prod_{j=1}^{s} \frac{cos(n_j\, arccos(2x_j-1))}{\sqrt{1-(2x_j-1)^2}}$ $(n_j \in Z), \Lambda_q = \Big\{(\nu_1,\dots,\nu_s)\in Z^s: \nu_j \ge \nu_j^{(0)},$ $\nu_1+\cdots+\nu_s \le q\Big\}$ *болсын . Онда*

$$\sup_{f\in SW_2^r(0,1)^s}\left|\int_{[0,1]^s} f(x)\,h(x)dx - Q_{\Lambda_q}\right| \succ\prec (ln\,N)^{r(s-1)+1}N^{-r-1}.$$

Ескерту. Q_{Λ_q} дегі $\hat{h}_n(\tau)$ коэффициенттерін

$\hat{h}_1(\tau) = \int_0^1 h_1(x)e^{-2\pi ix}dx = \int_0^1 e^{-2\pi ix} sin\,(arccos\,x)\,dx = \frac{B(1,\pi\,\tau)}{\tau},$

$$\hat{h}_2(\tau) = \int_0^1 h_2(x)e^{-2\pi ix}dx = \int_0^1 e^{-2\pi ix}\sin(2\arccos x)\,dx = -\frac{2iB(0,\pi\,\tau)}{\tau} + \frac{4iB(1,\pi\,\tau)}{\tau^2},$$

$$\hat{h}_{n+1}(\tau) = \int_0^1 e^{-2\pi i\tau x}\sin(n\arccos x)\,dx$$
$$= (n+1)\frac{\hat{h}_{n-1}(\tau)}{n-1} + \frac{2\hat{h}_n(\tau)}{\pi\tau}i \ \ (n = 2,3,\dots;\tau\in Z\{0\},$$

рекурентті формулалары арқылы есептеуге болатынды, мұндағы $B\,(x, y)$ - Бессель функциясы.

Пайдаланылған әдебиеттер:

1. Манин Ю.И. *Математика как метафора* (Издательство МЦНМО, М., 2008).
2. Хавин В.П. *Основы математического анализа* (Изд-во Ленинградск. ун-та, Л., 1989).
3. Никольский С.М. *Квадратурные формулы* (Наука, М., 1988).
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г. М. *Численные методы* (Наука, М., 1987).
5. Бабенко К.И. *Основы численного анализа* (Наука, М., 1986)
6. Коробов Н.М. *Теоретико-числовые методы в приближенном анализе* (Физматгиз, М., 1963).
7. Hua Loo Keng. Wang Yuan *Application of Number Theory of Numerical Analysis,* Springer Yerlag, Berlin; Heidelberg: New York, 1981.
8. Нурмолдин Е. *Восстанавление функций, интегралов и решений уравнения теплоправдивости из U_2- классов Ульянова*, Сиб. журн. вычисл. Матем.,8 (4), 337-351 (2005).
9. Темиргалиев Н., Кудайбергенов С.С., Шоманова А.А. *Применение тензорных произведений функционаналов о задачах численного интегрирования*, Изв. РАН, Сер.матем. 73 (2), 183-224 (2009).
10. Темиргалиев Н. *Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных*, Матем. сб., 181 (4), 490-505 (1990).
11. Жубанышева А. Ж., Темиргалиева Ж.Н., Темиргалиев Н. *Применение теории дивизоров к построению таблиц оптимальных коэффициентов квадратурных формул*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 49 (1), 14-25 (2009).
12. Н. Темиргалиев, С. С. Кудайбергенов, Н. Ж. Наурызбаев, *«Порядково точное вычисление интегралов от произведений функций методом тензорных произведений функционалов»*, Изв. Вузов. Матем., 2019,11, 94-99.