УДК 510.51

ЧАСТИЧНО РЕКУРСИВНОСТЬ НЕКОТОРЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИИ

Исмаилов Элдар Умирзакович
eldar.20151513@gmail.com
Магистрант 2 курса специальности «7М01509 – Математика» ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – Қасымқанұлы Бөрібай

Аннотация: в данной статье установлена частичная рекурсивность функций вычитания, деления и функции

$$f_3(x,y)=\begin{cases} z,\ \text{если}\ \ z^y = x. \\ \text{неопределено в остальных случаях.} \end{cases}.$$

Также показано, как из данных частично рекурсивных функций можно построить новые частично рекурсивные функции.

Ключевые слова: функция, рекурсия, суперпозиция, подстановка, арифметическая функция, механизм, частично рекурсивная функция, минимизация, примитивная рекурсия.

Нам будут даны три простейшие вычислимые функции $0(x)=0, S(x)=x+1, I_m^n(x_1,\ldots,x_n)=x_m\ (1\le m\le n; n=1,2,\ldots).$ С помощью некоторых операций из них будем строить новые вычислимые функции. Операции над числовыми функциями далее называются операторами.

Оператор суперпозиции. Пусть заданы n каких-либо частичных функций $f_1,\dots, f_n$ от одного и того же числа m переменных, определенных на каком-то множестве A со значениями в множестве B, и пусть на множестве B определена частичная функция f от n переменных, значения которой принадлежат некоторому третьему множеству C. Введем теперь частичную функцию g от m переменных, определенную на A со значениями в C, полагая по определению

$$g(x_1,\dots, x_m) = f\left(f_1(x_1,\dots, x_m),\dots, f_n(x_1,\dots, x_m)\right)$$

для произвольных $x_1,\dots, x_m$ на A. Поэтому говорят, что функция g получается операцией суперпозиции или подстановки из функций f, $f_1,\dots, f_n$.

Операция подстановки обозначается символом S^{n+1}, индекс сверху означает число функций. Через F^n обозначим совокупность всех частичных числовых функций от n переменных. Оператор Sn+1 является всюду определенной функцией из $F^n \times F^m \times \dots F^m$ в F^m.

Терм $S^{n+1}(f, f_1,\dots, f_n)$ имеет определенное значение (равное частичной m-местной функции) тогда и только тогда, когда значением переменной f будет n-местная функция, а значениями символов $f_1,\dots, f_n$ будут частичные функции от одного и того же числа переменных.

Пример. Пусть заданы обычные функции + и $\times$. Функция от x1, x2, x3, имеющая термальное представление $x_1 \times x_2 + x_3$, является значением операторного терма

$$S^3\left(+, S^3\left(\times I_1^3, I_2^3\right), I_3^3\right).$$

Оператор примитивной рекурсии. Пусть заданы какие-нибудь числовые частичные функции: n-местная g и (n + 2) - местная h. Говорят, что $(n+1)$ - местная частичная функция f возникает из функций g и h примитивной рекурсией, если для всех натуральных значений $x_1,\dots x_n, y$

$$f(x_1,\dots x_n, 0) = g(x_1,\dots x_n) \qquad (1)$$

$$f(x_1,\dots x_n, y+1) = h(x_1,\dots x_n, y, f(x_1,\dots x_n, y)) \qquad (2)$$

Одноместная частичная функция f возникает примитивной рекурсией из постоянной одноместной функции, равной числу a, и двуместной частичной функции h, если

$$f(0) = a, \qquad (3)$$

$$f(x+1) = h(x, f(x)). \qquad (4)$$

Если функция *f* существует, то из (1) и (2) последовательно находим

$$f(x_1,\dots x_n,0)=g(x_1,\dots x_n),$$

$$f(x_1,\dots x_n,1)=h(x_1,\dots x_n,0,g(x_1,\dots x_n)),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (5)$$

$$f(x_1,\dots x_n,m+1)=h(x_1,\dots x_n,m,g(x_1,\dots x_n,m)).$$

и потому f определена однозначно. Из соотношений (5), в частности, видно, что если для некоторых $x_1,\dots x_n,t$ значение $f(x_1,\dots x_n,t)$ не определенное, то не определенными будут и значения $f(x_1,\dots x_n,y)$ для всех $y \geq t$.

Чтобы при заданных частичных функциях g, h найти функцию f, возникающую из них примитивной рекурсией, достаточно равенства (5) принять в качестве равенств, определяющих значения функции f. Таким образом, для любых частичных n-местной функции g и (n + 2) - местной функции h (n = 0, 1, 2, …) существует одна и только одна частичная (n + 1) - местная функция f, возникающая из g и h примитивной рекурсией. Символически пишут

$$f = R(g,h)$$

и рассматривают R как символ двуместной частичной операции, определенной на множестве F всех частичных функций. Из соотношений (5) вытекает, что если функции g и h всюду определены, то и функция f всюду определена.

Оператор минимизации. Рассмотрим какую-нибудь n-местную ($n \geq 1$) частично числовую функцию f. Допустим, что существует какой-либо «механизм» для вычисления значений функции f, причем значение функции f не определено тогда и только тогда, когда этот механизм работает бесконечно, не выдавая никакого определенного результата.

Фиксируем какие-нибудь значения $x_1,\dots,x_{n-1}$ для первых $n-1$ аргументов функции f и рассмотрим уравнение

$$f(x_1,\dots,x_{n-1},y)=x_n$$

Чтобы найти решение y (натуральное) этого уравнения, будем вычислять при помощи указанного выше «механизма» последовательно значения $f(x_1,\dots,x_{n-1},y)$ для y = 0, 1, 2, ... Наименьшее значение a, для которого получится $f(x_1,\dots,x_{n-1},a)=x_n$, обозначим через

$$\mu_y(f(x_1,\dots,x_{n-1})=x_n). \qquad (7)$$

Описанный процесс нахождения значения выражения (7) будет продолжаться бесконечно в следующих случаях:

а) значение $f(x_1,\dots,x_{n-1},0)$ не определено;
б) значения $f(x_1,\dots,x_{n-1},y)$ для $y=0,1,\dots,a-1$ определены, но отличны от xn, а значение $f(x_1,\dots,x_{n-1},a)$ не определено;

в) значения $f(x_1,\dots,x_{n-1},y)$ определены для всех $y=0,1,2,\cdots$ и отличны от xn.

Во всех этих случаях значение выражения (7) считается неопределенным. В остальных случаях данный процесс обрывается и дает наименьшее решение $y=a$ уравнения (6).

Для частичных функций $f(x_1,\dots,x_{n-1},y)$ выражение (7), строго говоря, не есть наименьшее решение уравнения (1). Если же функция $f(x_1,\dots,x_{n-1},y)$ всюду определена и уравнение (6) имеет решение, то (7) есть наименьшее решение для (6).

Значение выражения при заданной функции *f* зависит от выбора значений для параметров $x_1,\dots,x_{n-1},x_n$ и потому оно есть функция (частичная) от аргументов $x_1,\dots,x_n$. Эту функцию обозначим символически через *Mf*, где *M* – символ операции, переводящей функцию *f* в функцию *Mf*. Если заданная функция *f* одноместна, то функцию *Mf* обозначают часто через f^{-1} и называют обращением функции *f* или обратной функцией. Таким образом,

$$f^{-1}(x)=\mu_y\left(f(y)=x\right).$$

Для многоместных функций *f* запись f^{-1} не употребительна. В дальнейшем оператор *M* будем называть *оператором минимизации*.

Есть и другое определение оператора минимизации. Здесь мы будем рассматривать $(n+1)$ - местную частично числовую функцию $f(x_1,\dots,x_n,y)$. Даем какие-нибудь значения $x_1, \dots, x_n$ для первых *n* аргументов функции *f* и рассмотрим уравнение

$$f(x_1,\dots,x_n,y)=0.$$

Наименьшее значение *a*, для которого получится $f(x_1,\dots,x_n,y)=0$, обозначим через $\mu_y\left(f(x_1,\dots,x_n,y)=0\right)$, то есть $a=\mu_y\left(f(x_1,\dots,x_n,y)=0\right)$.

Теорема 1. Следующие функции являются частично рекурсивными:

1) нигде не определенная функция, то есть функция $\omega(x)$ с пустой областью определения;

2) $f_1(x,y)=\begin{cases} x-y, & \text{если } x\ge y \\ \text{неопределено в остальных случаях} \end{cases}$;

3) $f_2(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x}{y}, & \text{если } x \text{ делится на } y \\ \text{неопределено в остальных случаях} \end{cases}$;

4) $f_3(x,y)=\begin{cases} z, \text{ если } z^y = x. \\ \text{неопределено в остальных случаях} \end{cases}$.

Теорема 2. Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ частично рекурсивна, то следующие функции частично рекурсивны:

1) $g_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n)$;

2) $g_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1)$;

3) $g_3(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

4) $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$.

Теорема 3. Если функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$, $g(x_1, \ldots, x_n, y)$ и $h(x_1, \ldots, x_n, y)$ частично рекурсивны, то следующие функции частично рекурсивны.

1) $f_1(x_1, \ldots, x_n) = \mu y[\varphi(x_1, \ldots, x_n, y) = g(x_1, \ldots, x_n, y)]$;
2) $f_2(x_1, \ldots, x_n) = \mu y[\varphi(x_1, \ldots, x_n, y) \neq g(x_1, \ldots, x_n, y)]$;
3) $f_3(x_1, \ldots, x_n) = \mu y[\varphi(x_1, \ldots, x_n, y) \leq g(x_1, \ldots, x_n, y)]$;
4) $f_4(x_1, \ldots, x_n) = \mu y[\varphi(x_1, \ldots, x_n, y) < g(x_1, \ldots, x_n, y)]$;
5) $f_5(x_1, \ldots, x_n) = \mu y[\varphi(x_1, \ldots, x_n, y) = 0 \text{ и } g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0]$;
6) $f_6(x_1, \ldots, x_n) = \mu y[\varphi(x_1, \ldots, x_n, y) = 0 \text{ или } g(x_1, \ldots, x_n, y) \leq h(x_1, \ldots, x_n, y)]$.

Список использованных источников

1. А.И. Мальцев, Алгоритмы и рекурсивные функции, М., Наука, 1986, с. 367.
2. Ж. Роджерс, Теория рекурсивных функций и эффективное вычисление, М., Мир, 1972, с. 624.