ПАРАМЕТРЛЕУ ӘДІСІ АРҚЫЛЫ ИМПУЛЬСТІК ӘСЕРІ БАР ШЕКТІК ЕСЕБІНІҢ БІР ШЕШІЛУІ ТУРАЛЫ

КОЙБАГАРОВА МЕРУЕРТ ОЙРАТОВНА
mikaoiratovna@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ Механика-математика факультетінің 7М05401 – Математика мамандығының 2 курс магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Тлеулесова А.Б.

Аннотация. Қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін импульсті әсері бар сызықтық екі нүктелі шекаралық есеп қарастырылады. Мәселенің дұрыс шешілуі үшін қажетті және жеткілікті шарттары қойылған.

Түйінді сөздер: шекаралық есеп, импульс, параметрлеу әдісі, дұрыс шешімділік.

Ұзақтығын елемеуге болатын, қысқа мерзімді бұзылулары бар нақты процесстердің эволюциясының математикалық модельдеуі импульстік эффектілері бар дифференциалдық теңдеулерді зерттеуге әкеледі.
Мұндай проблемалар XIX ғасырдың соңы – XX ғасырдың басында сызықты емес механиканың қалыптасу кезеңінде ғалымдардың назарын аударды, және де ең алдымен сызықты емес тербелмелі жүйелердегі процестерді тиісті түрде сипаттау мүмкіндігі физиктердің көңіліне түсті. Жаңа технологиялардың қарқынды дамуы математиктердің жыртылған траекториялары бар жүйелерді одан әрі зерттеуге деген қызығушылығының артуына әкелді. Зерттеу нәтижелері көптеген инженерлік, техникалық, экономикалық, биомедициналық және басқа да тапсырмаларда қолданылады.
Импульстік эффектілері бар дифференциалдық теңдеулердің сапалық теориясы А.Д. Мышкис, А. М. Самойленко [3], А. Халанай, Д. Векслер [4] және басқа математиктердің еңбектерінен бастау алады. Импульстік әсері бар қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін аймақтық есептер теориясы Киев математиктер мектебінің еңбектерінде айтарлықтай дамыды. Импульстік эффектісі бар қарапайым дифференциалдық теңдеулерге арналған шекаралық және мерзімді шекаралық есептер А.М. Самойленко, А. А. Перестюк, Шавкопляс, Трофимчук, Роговченко, Каранюлов және басқа математиктердің еңбектерінде қарастырылады. Олар импульстік эффектісі бар шекаралық есептердің шешілуін зерттеу үшін де, олардың шешімін табу үшін де әртүрлі әдістерді әзірледі және қолданды.
Атап айтқанда, импульстік эффектісі бар қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін А.М. Самойленко ұсынған сандық - аналитикалық әдіс кеңінен қолданылады. Қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесінің жалпы шешімін қолдану фундаментальды матрица тұрғысынан импульстік эффектісі бар сызықтық шекаралық мәселенің біржақты шешілуінің қажетті және жеткілікті жағдайларын алуға мүмкіндік беретінін ескереміз. Алайда, сирек жағдайларда айнымалы коэффициенттері бар дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін іргелі матрицаны құру мүмкіндігін ескере отырып, бұл бір мәнді ажыратымдылық критерийі тек шекті есептердің тар класы үшін қолданылады.
Импульстік эффектісі бар сызықты емес шекаралық есептер үшін белгілі бір болжамдарға сәйкес келетін шекаралық есептердің кластарын зерттеуге мүмкіндік беретін жеткілікті рұқсат ету шарттары ғана белгіленген. Егер қарастырылып отырған сызықтық емес қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесінің жалпы шешімі белгілі болса, онда импульстік эффект шарттары мен шекаралық жағдайларды қолдана отырып, еркін тұрақтыларға қатысты сызықтық емес теңдеулер жүйесін құруға болады. Мәселенің шешілуі салынған жүйенің шешімінің болуына тең болады. Қарапайым дифференциалдық теңдеулердің сызықты емес жүйелері үшін, әдетте, жалпы шешім табылмайтындықтан,

импульстік эффектісі бар сызықты емес шекаралық мәселенің шешілу белгісі ерекше жағдайларда қолданылады.
Сондықтан біз келесі сұрақтарды зерттейміз:
1) Фундаменталды матрицаны пайдаланбай импульсті әсері бар сызықтық екі нүктелі шеттік есептің бір мәнді ажыратымдылығының коэффициенттік өлшемдерін алу;
2) Деректер терминдерінде импульсті әсері бар қарапайым дифференциалдық теңдеулердің сызықты емес жүйесі үшін кезеңдік шекті есептің оқшауланған шешімінің болуының қажетті және жеткілікті жағдайларын белгілеу;
3) Импульстік әсері бар қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін шекті есептерді шешудің тиімді алгоритмдерін құру.
Бұл мәселелер Д,С. Жұмабаев ұсынған параметрлеу әдісі негізінде шешіледі.
$[0,T]$ интервалында қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін белгіленген уақыт моменттерінде импульсті әсері бар сызықтық екі нүктелі шекаралық есеп қарастырылады:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t),\, t \in [0,T]\backslash\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m\},\, \theta_i \in (0,\mathrm{T}),$$

$$i = \underline{1,m}, x \in R^n \qquad (1)$$

$$B_0 x(0) + \mathrm{C}_0 x(T) = d,\, d \in R^n, \qquad (2)$$

$$B_i x(\theta_i - 0) - \mathrm{C}_i x(\theta_i + 0) = p_i,\, p_i \in R^n, \qquad (3)$$

мұндағы $A(t)$ матрицасы және $f(t)$ вектор функциясы $[0,T]$ интервалында θ_i, $i = \underline{1,m}$, B_i, C_i, $i = (\underline{0,m})$ мүмкін бірінші типтегі үзіліс нүктелерімен үзіліссі болады; $\|x\| = \max\limits_i |x_i|$, $\|A(t)\| = \max\limits_i \sum_{j=1}^n \quad |a_{ij}(t)| \le \alpha$, $\|f(t)\|_1 = \max\limits_{t\in[0,T]} \|f(t)\|$.
$[0,T]$ интервалында (1)-(3) есебі $x(t)$ функциясы бойынша дифференциалданады, және ол функциясы $[0,T]$ интервалында θ_i барлық нүктелерінде, және (2),(3) шарттарын қанағаттандырады. $\tilde{C}([0,T], R^n)$ деп $[0,T]$ интервалында $\|x\|_2 = \max\limits_{i\in[0,m]} sup_{t\in[\theta_i,\theta_{i+1})} \|x(t)\|$, мұндағы $\theta_0 = 0$, $\theta_{m+1} = T$ нормасымен бірге үзіліссіз $x\colon\ [0,T] \to R^n$ функциялар кеңістігі ретінде белгілейміз.
Импульстік әсері бар дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін шекаралық есептерді зерттеу қажеттілігі импульстің әсеріне ұшыраған нақты процестерді сипаттайтын физика, технология, биологияның көптеген есептеріне байланысты. Импульстік эффектісі бар дифференциалдық теңдеулер жүйесін зерттеуге арналған жұмыстарға шолу мен библиографияны еңбектерден табуға болады [1-6]. Жұмыста [7] интервалдың ішкі нүктесінде импульстік эффектісі бар мерзімді есеп параметрлеу әдісімен зерттелді [8]. Шешімді табу алгоритмдері ұсынылған және мәселенің жалғыз шешілуін қамтамасыз ететін олардың конвергенциясы үшін жеткілікті жағдайлар жасалған. [9] жұмысында $A(t)$, B_i, $\mathrm{C}_i, i = (\underline{0,m})$, және θ_j матрицаларынан құрылған $Q_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1})$, $\nu \in N$, $h_j = \theta_j - \theta_{j-1}$, $j = \underline{1,m+1}$, $\theta_0 = 0$, $\theta_{m+1} = T$ матрицасы бойынша (1)-(3) есебінің шешімінің табылу алгоритмдері берілген, және олардың жинақталуының шарттары берілген. $Q_\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{m+1})$ матрица терминдерінде (1)-(3) есебінің біржақты шешілу шешімдері берілген. Осы жұмыста (1) - (3) есебінің жалғыз шешімділігінің бекітілген конвергенция алгоритмі үшін бөлу қадамын өзгерту әсері қарастырылады.

$l \in N$ санын алайық және $[0,T) = \cup_{r=1}^{(m+1)l}[t_{r-1},t_r), t_0 = 0, t_r = t_{r-1} + \frac{h_1}{l},\ r = \underline{1,l}, t_r = t_{r-1} + \frac{h_2}{l},\ r = \underline{l+1,2l}, \ldots, t_r = t_{r-1} + \frac{h_{m+1}}{l}, r = \underline{ml+1,(m+1)l}, h^0 = \max_{i=\underline{1,m+1}} h_i, h_i = \min_{i=\underline{1,m+1}} h_i, \delta = \frac{h^0}{h_0}$.

$x_r(t)$ функциясы ретінде $x(t)$ функциясының $[t_{r-1},t_r)$ интервалдарына бөлшектенуінің шенелгендігін белгілейік, және (1) - (3) есебін импульстік эффектісі бар көп нүктелі аймақтық есепке дейін азайтамыз.

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + f(t),\ \ t \in [t_{r-1},t_r),\ \ r = \underline{1,(m+1)l}, \tag{4}$$

$$B_0 \lim_{t\to t_{il}-0} x_1(0) + C_0 \lim_{t\to T-0} x_{(m+1)l}(t) = d, \tag{5}$$

$$B_i \lim_{t\to t_{il}-0} x_{il}(t) - C_i x_{il}(t_{il+1}) = p_i,\ \ i = \underline{1,m}. \tag{6}$$

$$\lim_{t\to t_s-0} x_s(t) = x_{s+1}(t_s),\ \ s = \left\{\underline{1,(m+1)l-1}\right\} \backslash \{il\},\ \ i = \underline{1,m}. \tag{7}$$

Мұнда (7) бөлімнің ішкі нүктелерінде шешімді келісу шарттары келтірілген.

$x(t)$ функциясы (1)-(3) есебінің шешімі, онда $x[t] = \left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{(m+1)l}(t)\right)'$ жүйесі (4)-(7) есебінің шешімі. Және керісінше, $\tilde{x}[t] = \left(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \ldots, \tilde{x}_{(m+1)l}(t)\right)'$ функциялар жүйесі (4)-(7) есебінің шешімі болса, онда онда $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_r(t), t \in [t_{r-1},t_r), r = \underline{1,(m+1)l}$, $\tilde{x}(T) = \lim_{t\to T-0} \tilde{x}_{(m+1)l}(t)$ бойынша анықталған $\tilde{x}(t)$ функциясы бастапқы есептің шешімі болады. $\lambda_r = x_r(t_{r-1})$ белгілеуін енгіземіз және $[t_{r-1},t_r)$ әр ішкі интервалында $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$ ауыстыру жасаймыз. Содан кейін (4)-(7) есебі параметрлері бар эквивалентті көп нүктелі шекаралық есепке дейін азаяды

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)[u_r(t) + \lambda_r] + f(t),\ \ t \in [t_{r-1},t_r), u_r(t_{r-1}) = 0,\ \ r = \underline{1,(m+1)l}, \tag{8}$$

$$B_0\lambda_1 + C_0 \lim_{t\to T-0} u_{(m+1)l}(t) + C_0\lambda_{(m+1)l} = d, \tag{9}$$

$$B_i \lim_{t\to t_{il}-0} u_{il}(t) + B_i\lambda_{il} - C_i\lambda_{il+1} = p_i,\ \ i = \underline{1,m}. \tag{10}$$

$$\lambda_s + \lim_{t\to t_s-0} u_s(t) = \lambda_{s+1},\ \ s = \left\{\underline{1,(m+1)l-1}\right\} \backslash \{il\},\ \ i = \underline{1,m}. \tag{11}$$

Егер $(\lambda, u[t])$ жұбы

$\lambda = \left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{(m+1)l}\right)' \in R^{n(m+1)l},\ u[t] = \left(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_{(m+1)l}(t)\right)'$ бірге (8)-(11) есебінің щещімі болса, $x[t] = \left(\lambda_1 + u_1(t), \lambda_2 + u_2(t), \ldots, \lambda_{(m+1)l} + u_{(m+1)l}(t)\right)'$ функциялар жүйесі (4)-(7) есебінің шешімі болады.

Керісінше, егер $\tilde{x}[t] = \left(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \ldots, \tilde{x}_{(m+1)l}(t)\right)'$ функциясы (4)-(7) есебінің шешімі болса, онда $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$ жұбы $\tilde{\lambda} = \left(\tilde{x}_1(0), \tilde{x}_2(t_1), \ldots, \tilde{x}_{(m+1)l}(T)\right)'$,

$\tilde{u}[t] = \left(\tilde{x}_1(t) - \tilde{x}_1(0), \tilde{x}_2(t) - \tilde{x}_2(t_2), \ldots, \tilde{x}_{(m+1)l}(t) - \tilde{x}_{(m+1)l}(t_{(m+1)l-1})\right)'$ бірге (8)-(11) есебінің шешімі болады. Алайда, (8)-(11) есебі (4)-(7) есебінен ерекшеленеді, өйткені $t = t_{r-1}, r = \underline{1,(m+1)l}$ нүктелерінде бастапқы шарттар пайда болады. Ол нүктелер екінші ретті Вольтерр интегралдық теңдеуіндегі $u_r(t), t \in [t_{r-1}, t_r), r = \underline{1,(m+1)l}$ функцияларын анықтауға береді.

$$u_r(t) = \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau)[u_r(\tau) + \lambda_r]d\tau + \int_{t_{r-1}}^{t} f(\tau)d\tau,$$
$$t \in [t_{r-1}, t_r), r = \underline{1,(m+1)l}. \quad (12)$$

(12) теңдіктің оң жағын сәйкесінше қоюдың орнына және ν $(\nu = 1,2,\dots)$ процесін қайталанғанша, біз келесі фукцияны аламыз:

$$\mathrm{u}_{\mathrm{r}}(t) = D_{\nu,r}(t)\lambda_r + F_{\nu,r}(t) + G_{\nu,r}(u,t), \quad \mathrm{t} \in [\mathrm{t}_{\mathrm{r-1}}, t_r), \ r = \overline{1,(m+1)l}, \quad (13)$$

$$D_{,\nu,r}(t) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \int_{t_{r-1}}^{t_r} A(\tau_1)\dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)d\tau_\nu \dots d\tau_1,$$

$$G_{\nu,r}(u,t) = \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)\dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_\nu} A(\tau_{\nu+1})u_r(\tau_{\nu+1})d\tau_{\nu+1}\dots d\tau_1,$$

$$F_{\nu,rr}(t) = \int_{t_{r-1}}^{t_r} f(\tau_1)d\tau_1 + \sum_{t_{r-1}}^{t} \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)\dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{j-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu)d\tau_\nu \dots d\tau_1.$$

(13)-тен аламыз:

$$\lim_{t \to t_r - 0} u_r(t) = D_{\nu,r}(t_r)\lambda_r + F_{\nu,r}(t_r) + G_{\nu,r}(u_r, t_r), \qquad r = \underline{1,(m+1)l.}$$

(14) -тің оң жағын сәйкесінше (9),(10) шарттарына апарып, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{(m+1)l}$ белгісіз параметрлері үшін теңдеулер жүйесін аламыз:

$$Q_\nu(l)\lambda = -F_\nu(l) - G_\nu(u,l), \lambda \in R^{n(m+1)l}, \quad (15)$$

(4)-(7) параметрі бар көп нүктелі шеттік есебінің шешімі $\left(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t]\right)$ жұп тізбегінің шегі ретінде анықталады, ол келесі алгоритм бойынша беріледі:
0. (a) $l \in N,\ \nu \in N$ кейбір сандары үшін $Q_\nu(l)\colon R^{n(m+1)l} \to R^{n(m+1)l}$ матрицасы кері, $\lambda \in R^{n(m+1)l}$ параметрінің бастапқы жақындауы $Q_\nu(l)\lambda^{(0)} = -F_\nu(l)$, $\lambda^{(0)} = -[Q_\nu(l)]^{-1}F_\nu(l)$ теңдігінен табылады:
(ә) $\lambda^{(0)} \in R^{\mathrm{n(m+1)l}}$ векторлық компоненттерін қолдану және $[t_{r-1}, t_r)$, интервалында $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$ көмегімен (8) Коши есебін шығару арқылы $u_r^{(0)}(t),\ _0 r = \overline{1,(m+1)l}.$ функцияларын табамыз.
1. (a) $u_r^{(0)}(t)$берілуі (15) теңдігінің оң жағынан анықталған. Параметрінің бірінші жақындауын анықтаймыз;
(ә) $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$ параметрі көмегімен $[t_{r-1}, t_r)$ интервалында (8) Коши есебін шешу арқылы $u^{(1)}(t),\ r = \underline{1,(m+1)l}$ функцияларын табамыз. Солай жалғастырамыз. k қадамында $\left(\lambda_r^{(k)}, u_r^{(k)}(t)\right),\ k = 0,1,2\dots.\ r = \underline{1,(m+1)l}$

жұп функциялар жүйесін табамыз.
Келесі теорема (1) - (3) импульстік әсері бар шекті есепті жалғыз шешуге ұсынылған алгоритмнің жүзеге асырылуы мен жақындасуының жеткілікті жағдайларын қамтамасыз етеді.

Теорема 1. $l \in N$ және $\nu \in N$ кейбір сандары үшін $Q_\nu(l): R^{n(m+1)l} \to R^{n(m+1)l}$ матрицасы кері деп алсақ, онда келесі теңдіктер айқын:

$$\left\| [Q_\nu(l)]^{-1} \right\| \le \gamma_\nu(l), \tag{16}$$

$$q_\nu(l) = \gamma_\nu(l) \max\left[1, \max_{i=\overline{1,m}} \frac{h_i}{l}\|B_i\|, \frac{h_{m+1}}{l}\|C_0\|\right] \times$$
$$\times \left\{ \exp\left(\frac{\alpha h^0}{l}\right)^j - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{1}{j!}\left(\frac{\alpha h^0}{l}\right)^j \right\} < 1. \tag{17}$$

Онда (1)-(3) импульс эффектісі бар шеттік есебінің жалғыз $x^*(t)$ шешімі бар болады, және келесі теңдік орындалады:

$$\|x^*\| = \max_{\mathrm{r}=1,(\mathrm{m}+1)\mathrm{l}} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|x^*(t)\| \le L_{1,\nu}(l) \max\left(\|d\|, \|f\|_1, \max_{i=\overline{1,m}} \|p_i\|\right), \tag{18}$$

мұндағы $\mathrm{L}_{1,\nu}(l)$ функциясы $f(t)$, d, p_i элементтерінен тұрақсыз, және B_{i}, C_i, $i = (\overline{0,m})$, α, h^0, $\gamma_\nu(l)$, $q_\nu(l)$, ν, l арқылы беріледі.
Келесі мәлімдемелер 1 - теореманың шарттары жеткілікті ғана емес, сонымен бірге (1) - (3) мәселенің біржақты шешілуі үшін қажет екенін анықтайды.

Теорема 2. (1)-(3) импульс әсері бар шеттік есебінің бірмәнді шешімі бар болады сонда ғана, егер кез келген $l \in N$, $\nu \in N$ кейбір сандары үшін $Q_\nu(l): R^{n(m+1)l} \to R^{n(m+1)l}$ $Q_\nu(l)\ :\ R^{n(m+1)l} \to R^{n(m+1)l}$ матрицасы кері болса, және 1 теореманың (16),(17) шарттары орындалса.

Теорема 3. (1)-(3) импульс әсері бар шеттік есебінің бірмәнді шешімі бар болады сонда ғана, егер кез келген $\nu \in N,\ l = l(\nu) > 0,\ l \in N$ сандары үшін $Q_\nu(l): R^{n(m+1)l} \to R^{n(m+1)l}$ $Q_\nu(l)\ :\ R^{n(m+1)l} \to R^{n(m+1)l}$ матрицасы кері болса, және 1 теореманың (16),(17) шарттары орындалса.
Келесі мәлімдемелер дұрыс ажыратымдылық константасы мен $Q_\nu(l)$ матрица нормасының жоғарғы шегі арасында байланыс орнатады .

Теорема 4. Егер (1)-(3) импульс әсері бар шеттік есебінің K тұрақтысымен бірге бірмәнді шешімі болса, онда кез келген $\varepsilon > 0, \nu \in N$, $l_1 = l_1(\varepsilon, \nu)$ сандары үшін $Q_\nu(l)$ матрицасы кері, және кез келген $l \geq l_1(\varepsilon, \nu)$ үшін келесі бағалау орынды:

$$\|\left[H^{-1}Q_\nu(l)\right]^{-1}\| \leq (1+\varepsilon)K$$

мұндағы

$$H = \frac{1}{l} diag\left(h_{m+1}I, \underbrace{h_1 I, \ldots, h_1 I}_{l}, \underbrace{h_1 I, h_2 I, \ldots, h_2 I}_{l}, \ldots, \underbrace{h_m I, h_{m+1} I, \ldots, h_{m+1} I}_{l}\right).$$

Теорема 5. $\nu \in N$ кез келген сандары үшін $l_0 = l_0(\nu)$ бар болсын сондай, барлық $l \geq l_0(\nu)$ үшін $Q_\nu(l)$ матрицасы кері, және оның кері матрицасы келесі теңсіздікті қанағаттандырсын:

$$\|\left[H^{-1}Q_\nu\right]^{-1}\| \leq \gamma,$$

мұндағы γ константасы l элементінен тұрақсыз. Онда (1)-(3) есебі $K = \gamma$ тұрақтысымен бірмәнді шешіледі.

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Импульстік дифференциальные уравнения // Жоғарғы мектеп. Киев. 1987.
2. Джумабаев Д.С. КСРО Есептеу математикасыы және математикалық физика, 1989. – 29,34-46 с.
3. Тлеулесова А.Б. Импульстік эффектісі бар қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесіне арналған мерзімді шекаралық есеп талдау және қолданбалы математика бойынша халықаралық конференция // (ICAAM 2016), AIP Conf.Proc.1759, 020061-1 – 020061-5.
4. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Аймақтық есептерді шешудің сандық-аналитикалық әдістері. Киев. 1986. – 565 с.
5. 5. E. Liz, and J. Nieto, Communications in applied analysis 2, 565 – 571 (1998).
6. Джумабаев Д.С. , Темешева С.М. Есептеу математикасы және математикалық физика, 2007. – 47,37-61 с.