УДК 51

ЛОГАРИФМДІК ЕРЕКШЕЛІГІ БАР БӨЛШЕК РЕТТІ ИНТЕГРАЛДЫҚ ОПЕРАТОРДЫҢ ШЕНЕЛІМДІЛІК КРИТЕРИЙІ

Тажихан Б.М
balausa-26@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия Ұлттық университеті,
Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі: Абылаева А.М.

$1 < p, q < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,\ \ I = (0, \infty)$ және $\gamma > \frac{1}{p}$ болсын. (1) түріндегі интегралдық оператордың

$$Kf(x)=\int_0^x s^{\gamma-1}\ln\frac{x}{x-s}f(s)ds, \qquad s>0 \tag{1}$$

L_p кеңістігінен L_q кеңістігіне шенелгендігі және компактылығы туралы критерийі [1] еңбекте тағайындалды.

[2] жұмысында келесідей интеграл операторының

$$Kf(x)=\int_0^x \frac{f(s)}{W(s)}\ln\frac{W(x)}{W(x)-W(s)}w(s)ds, \qquad x\in I \tag{2}$$

$L_{p.w}=L_{p.w}(I)$ кеңістігінен $L_{q.v}=L_{q.v}(I)$ кеңістігіне дейінгі шенелімділік критерийілері алынған болатын.

Айталық, $1<p\le q<\infty$ және $v(x)=x^{-q}$ болсын. Келесі интеграл операторының

$$Kf(x)=\int_0^x \frac{f(s)}{s}\ln\frac{x}{x-s}ds, \qquad x\in I \tag{3}$$

$L_{p.w}=L_{p.w}(I)$ кеңістігінен $L_{q.v}=L_{q.v}(I)$ кеңістігіне дейін компакты болуының қажетті және жеткілікті шарттары [3] еңбегінде алынды.

$$K^*f(s)=s^{\gamma-1}\int_s^\infty \ln\frac{x}{x-s}f(x)dx, \quad s>0 \tag{4}$$

(1) операторына $\int_0^\infty f(x)g(x)dx$ скаляр көбейтінді бойынша түйіндес оператор. $L_{q'}=(L_q)^*$ және $L_{p'}=(L_p)^*$. (2) операторының әр түрлі жағдайдағы $L_{q'}$ кеңістігінен $L_{p'}$ кеңістігіне шенелімділік критерийін орнатуын қарастырамыз.

$$Hf(x)=s^{\gamma}\int_s^\infty \frac{f(x)}{x}dx, \qquad s>0 \tag{5}$$

операторын қарастырамыз.

$\forall f\ge 0$ үшін
$$K^*f\ge Hf(x) \tag{6}$$

теңсіздігі орындалады.

Теорема А. Айталық, $1<q'\le p'<\infty$, $\gamma>\frac{1}{q}$ болсын. H операторы $L_{q'}$ кеңістігінен $L_{p'}$ кеңістігіне шенелген болады, сонда тек сонда ғана, егер келесі теңсіздік орындалса:

$$A^*=\sup_{x>0}\left(\int_0^x s^{p'\gamma}ds\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_x^\infty t^{-q}dt\right)^{\frac{1}{q}}<\infty,$$

мұнда $\|H\|\approx A$ орындалады.

Теорема 1. Айталық, $1 < q' \le p' < \infty$, $\gamma > \dfrac{1}{q}$ болсын. K^* операторы $L_{q'}$ кеңістігінен $L_{p'}$ кеңістігіне шенелген болады, сонда тек сонда ғана, егер келесі теңсіздік орындалса:

$$A^* = \sup_{x>0}\left(\int_0^x s^{p'\gamma} ds\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_x^\infty t^{-q} dt\right)^{\frac{1}{q}} < \infty .$$

Сонымен қатар $\|K^*\| \approx A$.

Дәлелдеуі: *Қажеттілік.* Егер K^*операторы шенелген болса, онда $A^* < \infty$ шарты орындалады ма?

K^* операторы $L_{q'}$ кеңістігінен $L_{p'}$ кеңістігіне шенелген болсын, яғни

$$\|K^* f\|_{p'} \le \|K^*\| \|f\|_{q'}, \ \forall f \ge 0 .$$

(5) операторы мен (6) формулаларын пайдаланғанда,

$$\|Hf\|_{p'} \le \|K^*\| \|f\|_{q'}, \ \forall f \ge 0 . \qquad (1)$$

болады, яғни H операторы $L_{q'}$ кеңістігінен $L_{p'}$ кеңістігіне шенелген және$\|H\| \le \|K^*\|$ болады. Онда А теоремасының нәтижесіне сүйенсек, $A^* < \infty$ ақырлы шама және $\|H\| \approx A^*$. Сәйкесінше,

$$\|K^*\| >> A^*. \qquad (2)$$

Қажеттілігі дәлелденді.

Жеткіліктілігі. $A^* < \infty$ болсын. K^* операторының шенелгендігін көрсетеміз.

$0 \le f \in L_{q'}$болсын. $x > s \ge 0$ үшін $\ln\dfrac{x}{x-s} \ge 0$ орындалады. $I = (0;\infty) = \bigcup_k I_k$ және $I_k = [2^k;2^{k+1})$ болсын. Сонда: $\|K_\gamma f\|_{L_{p'}}^q = \int_0^\infty (K^* f)^{p'} dx = \sum_k \int_{2^{k-1}}^{2^k} s^{p'(\gamma-1)}\left(\int_s^\infty \ln\dfrac{x}{x-s} f(x)dx\right)^{p'} ds \le$

$$\le 2^{p'}\left[\sum_k \int_{2^{k-1}}^{2^k} s^{p'(\gamma-1)}\left(\int_s^{2^{k+2}} \ln\frac{x}{x-s} f(x)dx\right)^{p'} ds + \sum_k \int_{2^{k-1}}^{2^k} s^{p'(\gamma-1)}\left(\int_{2^{k+2}}^\infty \ln\frac{x}{x-s} f(x)dx\right)^{p'} ds\right] <<$$

$$<< \sum_k \int_{2^{k-1}}^{2^k} s^{p'(\gamma-1)}\left(\int_s^{2^{k+2}} \ln\frac{x}{x-s} f(x)dx\right)^{p'} ds +$$

$$+ \sum_k \int_{2^{k-1}}^{2^k} s^{p'(\gamma-1)}\left(\int_{2^{k+2}}^\infty \ln\frac{x}{x-s} f(x)dx\right)^{p'} ds = J_1 + J_2 . \qquad (3)$$

J_1 және J_2 – ні жеке-жеке бағалаймыз. $x > s \geq 0$ үшін $\frac{1}{s}\ln\frac{x}{x-s}$ функцияның x айнымалысы бойынша кемімелі және s айнымалысы бойынша өспелі қасиетін пайдалана отырып, келесі теңсіздікті аламыз:

$$J_1 = \sum_k \int_{2^{k-1}}^{2^k} s^{p'(\gamma-1)} \left(\int_s^{2^{k+2}} \ln\frac{x}{x-s} f(x)dx \right)^{p'} ds = \sum_k \int_{2^{k-1}}^{2^k} s^{p'\gamma} \left(\int_s^{2^{k+2}} \frac{1}{s}\ln\frac{x}{x-s} f(x)dx \right)^{p'} ds \leq$$

$$= \sum_k \int_{2^{k-1}}^{2^k} s^{p'\gamma} \left(\int_s^{2^{k+2}} \frac{1}{s}\ln\frac{x}{x-s} f(x)dx \right)^{p'} ds \leq$$

$$\left| \begin{array}{l} s \leq x \leq 2^{k+2} \Rightarrow 2^{k-1} \leq s \leq 2^k \leq 2^{k+1} \leq x \leq 2^{k+2} \Rightarrow x \geq 2^{k+1} \\ 2^{k-1} \leq s \leq 2^k \Rightarrow s \leq 2^k \end{array} \right|$$

$$\leq \sum_k \int_{2^{k-1}}^{2^k} s^{p'\gamma} \left(\int_s^{2^{k+2}} \frac{1}{2^k}\ln\frac{2^{k+1}}{2^{k+1}-2^k} f(x)dx \right)^{p'} ds \leq$$

$$\leq (\ln 2)^q \sum_k \int_{2^{k-1}}^{2^k} s^{p'\gamma} \left(\int_s^{2^{k+2}} \frac{1}{2^k} f(x)dx \right)^{p'} ds <<$$

$$<< \int_0^\infty s^{p'\gamma} \left(\int_s^\infty \frac{f(x)}{x} dx \right)^{p'} ds = \|Hf\|_{p'}^{p'}. \tag{4}$$

Осыдан А теоремасы бойынша келесі қатынас шығады:

$$J_1 << A^{p'} \|f\|_{q'}^{p'} \tag{5}$$

Гельдер теңсіздігін және Йенсен теңсіздігін, $s = xt$ айнымалыны енгізу арқылы бағалауды аламыз:

$$J_2 = \sum_k \int_{2^{k-1}}^{2^k} s^{p'\gamma} \left(\int_{2^{k+2}}^\infty \ln\frac{x}{x-s} f(x)dx \right)^{p'} ds \leq$$

$$\leq \sum_k \int_{2^{k-1}}^{2^k} s^{p'(\gamma-1)} \left(\int_{2^{k+2}}^\infty f^{q'}(x)dx \right)^{\frac{p'}{q'}} \left(\int_{2^{k+2}}^\infty \ln^q \frac{x}{x-s} dx \right)^{\frac{p'}{q}} ds \leq$$

$$\left| \begin{array}{l} 2^{k-1} \leq s \leq 2^k \\ 2^{k+2} \leq x \leq \infty \Rightarrow \\ x > s \Rightarrow 2^{k-1} \leq s \leq 2^k \leq 2^{k+2} \leq x \leq \infty \Rightarrow 2^{k-1} \leq x \leq \infty \end{array} \right|$$

$$\leq \sum_k \int_{2^{k-1}}^{2^k} s^{p'(\gamma-1)} \left(\int_{2^{k-1}}^\infty f^{q'}(x)dx \right)^{\frac{p'}{q'}} \left(\int_{2^{k-1}}^\infty \ln^q \frac{x}{x-s} dx \right)^{\frac{p'}{q}} ds \leq$$

$$\leq \sum_k \int_{2^{k-1}}^{2^k} s^{p'(\gamma-1)} \left(\int_{2^{k-1}}^{\infty} f^{q'}(x)dx \right)^{\frac{p'}{q'}} \left(\int_s^{\infty} \ln^q \frac{x}{x-s} dx \right)^{\frac{p'}{q}} ds \leq$$

$$\leq \sum_k \left(\int_{2^{k-1}}^{\infty} f^{q'}(x)dx \right)^{\frac{p'}{q'}} \left(\int_{2^{k-1}}^{2^k} x^{p'(\gamma-1)} t^{p'(\gamma-1)} \cdot tdx \right) \left(\int_0^1 \ln^q \frac{x}{x-xt} \cdot \frac{x}{t} dt \right)^{\frac{p'}{q}} \leq$$

$$\leq \sum_k \left(\int_{2^{k-1}}^{\infty} f^{q'}(x)dx \right)^{\frac{p'}{q'}} \left(\int_{2^{k-1}}^{2^k} x^{p'(\gamma-1)+\frac{p'}{q}} dx \right) \left(\int_0^1 t^{q(\gamma-1)} \ln^q \frac{x}{x-xt} dt \right)^{\frac{p'}{q}} =$$

$$= \beta^{\frac{p'}{q}} \sum_k \left(\int_{2^{k-1}}^{\infty} f^{q'}(x)dx \right)^{\frac{p'}{q'}} \int_{2^{k-1}}^{2^k} x^{p'(\gamma-1)+\frac{p'}{q}} dx <<$$

$$<< \sum_k \left(\int_{2^{k-1}}^{\infty} f^{q'}(x)dx \right)^{\frac{p'}{q'}} \left[2^{k\left(-1+\frac{1}{q}\right)} \left(\int_{2^{k-1}}^{2^k} x^{p'\gamma} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \right]^{p'} <<$$

$$<< \sum_k \left(\int_{2^{k-1}}^{\infty} f^{q'}(x)dx \right)^{\frac{p'}{q'}} \left[\left(\int_0^{2^k} s^{-q} ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{2^{k-1}}^{2^k} x^{p'\gamma} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \right]^{p'} <<$$

($\frac{p'}{q'} \geq 1$ екенін ескере отырып, Йенсен теңсіздігін қолданамыз, онда):

$$\leq A^{p'} \sum_k \left(\int_{2^{k-1}}^{\infty} f^{q'}(x)dx \right)^{\frac{p'}{q'}} \leq A^{p'} \left(\sum_k \int_{2^{k-1}}^{\infty} f^{q'}(x)dx \right)^{\frac{p'}{q'}} << A^{p'} \|f\|_{q'}^{p'}, \tag{6}$$

мұндағы $\beta = \int_0^1 t^{q(\gamma-1)} \ln^q \frac{1}{1-t} dt$.

(2), (4) және (5) бойынша келесідей қатынасты аламыз:

$$\left\| K^* f \right\|_{p'} << A^* \|f\|_{q'} \tag{7}$$

Сонымен, біз қажеттілік жағдайында (2) қатынасының орындалатындығын, ал жеткіліктілігінде (7) бойынша $\left\|K^*\right\| << A^*$ екендігін көрсеттік. Сонда, $\left\|K^*\right\| \approx A$. Теорема 1 толығымен дәлелденді.

Теорема 2. Айталық, $1 < p' < q' < \infty$, $\gamma > \frac{1}{q}$ болсын. K^* операторы $L_{q'}$ кеңістігінен $L_{p'}$ кеңістігіне шенелген болады, сонда тек сонда ғана, егер келесі теңсіздік орындалса:

$$B^* = \left[\int_0^\infty x^{-q} \left(\int_0^x s^{p'\gamma} ds \right)^{\frac{q'}{q'-p'}} \left(\int_x^\infty \frac{1}{t^q} dt \right)^{\frac{q'(p'-1)}{q'-p'}} dx \right]^{\frac{q'-p'}{p'q'}} < \infty ,$$

Сонымен қатар $\|K^*\| \approx B^*$.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1. Abylayeva A.M. and Omirbek M.Zh. A weightes estimate for integral operator with a logarithmic singularity. Izv. Nats. Akad. Nauk. Resp. Kaz. Ser. Fiz. Mat. 2005, No. 1, 38-47 (in Russian).
2. Ойнаров Р., Абылаева А.М., Муратбеков М.М. Ограниченность интегрального оператора с логарифмическим ядром в весовых пространствах. – Алматы: «Ғылым ордасы» баспасы, 2013. – 520 бет.
3. Абылаева А.М., Байарыстанов А.О. Критерий компактности оператора дробного интегрирования бесконечно малого порядка. // Уфимский математический журнал. 2013. Т.5, №1. С. 3-10.