УДК 517.5

САНДЫҚ ҚАТАРЛАРДЫ ЖАЛПЫЛАНҒАН МОНОТОНДЫ ТІЗБЕКТЕР КЛАССЫНДА ЖИНАҚТЫЛЫҚҚА ЗЕРТТЕУ

Талгат Сауле
saule.talgat.97@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ-нің 2-курс магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Джумабаева А.А.

Анықтама 1

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

түріндегі өрнекті сандық қатар деп атаймыз.

Мұндағы $a_n \in R.$

Анықтама 2 $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ тізбегінің мүшелері қатарың мүшелері деп аталып, ал a_n -сандық қатардың жалпы мүшесі деп аталады.

Анықтама 3

$$\begin{aligned}
&S_1 = a_1, \\
&S_2 = a_1 + a_2, \\
&S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\
&... \\
&S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n, \\
&...
\end{aligned}$$

қосындылары дербес қосындылар ал, S_n -(1) сандық қатарының n-ші дербес қосындысы деп аталады.

Анықтама 4 Егер $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ бар болып, және S -ке тең болса, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ болса, онда (1)-қатары жинақты болып, ал S - оның қосындысы деп аталады. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ шек табылмаса немесе дербес жағдайда шексіздік болса, онда (1)-қатары жинақсыз болады.

Анықтама 5

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + ... + a_{n+k} + ...$$

қосындысы (1)-сандық қатарының қалдығы деп аталады.

Егер (1)-қатары жинақты болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(S - S_n\right) = 0$ болады.

Теорема 1 (қатардың жинақты болуының қажетті шарты)

Егер (1) қатары жинақты болса, онда оның жалпы мүшесі нөлге ұмтылады. Яғни $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$ Керісінше тұжырым дұрыс болмайды.

Теорема 2 (қатардың жинақты болуының жеткілікті шарты)

Егер $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$ болса, онда (1)-қатары жинақсыз қатар болады.

Анықтама 6 Мүшелерінің таңбасы әртүрлі болатын $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сандық қатары берілсін. Мүшелерінің таңбасы кезектесіп отыратын сандық қатар

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + \left(-1\right)^{n-1} a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^{n-1} a_n$$

ауыспалы таңбалы қатар деп аталады.

Мұндағы $a_1, a_2, a_3, a_4, ...$-оң сандар.

Анықтама 7 $\{a_n\}$ тізбегі берілсін. Егер әрбір n (n=1,2,…) үшін

$a_n \le a_{n+1}$ болса, онда тізбек кемімейтін

$a_n < a_{n+1}$ болса, онда тізбек өспелі

$a_n \ge a_{n+1}$ болса, онда тізбек өспейтін

$a_n > a_{n+1}$ болса, онда тізбек кемімелі деп аталады.

Және бұл тізбектердің әрқайсысы монотонды деп аталады.

Барлық монотонды кемімелі сандық тізбектер жиынын келесі түрде белгілейміз. MS

Теорема 3 (Коши)

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ кемімелі тізбегі берілсін. Онда келесі қатарлар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ бір уақытта жинақталып, жинақталмайды. [1]

Теорема 5 (Абель белгісі)

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ сандық қатары берілсін. Егер қайсы бір $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\mathrm{b_n}\}_{n=0}^{\infty}$ сандық тізбектері үшін:

- $\forall n:\ \mathrm{c_n} = a_n \cdot b_n$ теңдігі орындалса
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ қатары жинақталса
- $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ тізбегі-монотонды тізбек болса
- $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ тізбегі шенелген болса, яғни $|\mathrm{b_n}| \le c,\ (\mathrm{n} = 0,1,\ldots)$ теңдігі орындалатындай c оң саны табылатын болса, онда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ қатары жинақталады. [1]

Ал, квазимонотонды тізбектер жиыны келесідей енгізіледі:

$$QM = \left\{ \lambda = \{\lambda_n\} n \in N : \lambda_n \in R, \exists \tau \ge 0, \frac{\lambda_n}{n^{\tau}} \downarrow болса \right\}.$$

Енді біз О-тұрақты түрде өзгеретін квазимонотонды тізбектің жалпыланған классын анықтайық.

$$ORVQM = \left\{ \lambda = \{\lambda_n\} n \in N : \lambda_n \in R, \exists \mu_n \ge 0, \mu_n \uparrow, \mu_{2n} \le C\mu_n, \frac{\lambda_n}{\mu_n} \downarrow болса \right\}.$$

Лейндлер кемімелі тізбектің кейбір қасиеттерін сақтай отырып, тізбектің басқа бір классын анықтады.

(RBVS-тыныштықпен шектелген вариацияның тізбегі)

$$RBVS = \left\{ \lambda = \{\lambda_n\} n \in N : \lambda_n \in R, \lambda_n \to 0, \sum_{\upsilon=n}^{\infty} |\lambda_{\upsilon+1} - \lambda_{\upsilon}| \le C|\lambda_n|, \forall n \in N \right\}.$$

Атап айтқанда

$$\{\lambda_n\} \in RBVS :\Leftrightarrow \forall n \le k : |\lambda_k| \le c|\lambda_n|$$

QM (немесе $ORVQM$) және $RBVS$ класстарын салыстыруға келмейді.

Кейін Тихонов жоғарыда аталған барлық класстарды қамтитын келесі жаңа классты енгізді.

Анықтама 8 $\lambda := \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ нақты сандар тізбегі жалпы монотонды деп аталып, $\lambda \in GM$ түрінде белгіленеді егер барлық n бүтін сандары үшін

$$\sum_{k=n}^{2n}\left|\lambda_k-\lambda_{k+1}\right|\le C\left|\lambda_n\right|$$

қатынасы орындалса. [5]

Жалпы монотонды тізбектің келесі сипаттамасы белгілі.

Лемма 1: $\lambda\in GM$ орындалады егер c>0 болғанда

1. $n\le k\le 2n:\left|\lambda_k\right|\le C\left|\lambda_n\right|$
2. $\forall n<N:\sum_{k=n}^{N}\left|\Delta\lambda_k\right|\le C\left(\left|\lambda_n\right|+\sum_{k=n+1}^{N}\frac{\left|\lambda_k\right|}{k}\right)$ шарттары орындалса.

Тізбектің келесі қасиеті дұрыс.

Лемма 2: Егер $\lambda=\{\lambda_n\}\in GM$ және $\eta=\{\eta_n\}$ болса, онда $\lambda\eta=\{\lambda_n\eta_n\}\in GM$ орындалады.

Төменде $\{\Delta\lambda_n\}\in GM$ және $\left\{\Delta\frac{\lambda_n}{n^{\alpha}}\right\}\in GM$ орындалатындай бірақ монотонды немесе дөңес емес $\{\lambda_n\}$ тізбектеріне мысал келтіреміз.

Мысал 1:

$$\lambda_n=\begin{cases}n^{\alpha+1}, 2^k<n<2^{k+1}\\ n^{\alpha+1}+c, n=2^k,\end{cases}$$

тізбегін қарастырайық.

Мұндағы $\alpha>1$ және $c>2^{k(\alpha+1)}$

Мұны тексеру оңай:

1. $\{\lambda_n\}\in GM$
2. $\{\Delta\lambda_n\}\in GM$
3. $\left\{\frac{\lambda_n}{n^r}\right\}\in GM, r>0$ болса
4. $\left\{\Delta\frac{\lambda_n}{n^r}\right\}\in GM, r>0$ болса

Мысал 2: $\{\lambda_n\}$ тізбегі $\lambda_{2n}\le C\lambda_n$ шартын қанағаттандыратын кемімейтін тізбек болсын.

Келесідей тізбек қарастырайық.

$$\left\{\lambda_n^{'}\right\} := \begin{cases} \lambda_n, 2^k \le n \le 2^k + 2^{k-1} - 1, \\ \lambda_{2^k + 2^{k-1} - n} = \lambda_{2^k + 2^{k-1} + n - 1}, 1 \le n \le 2^{k-1}, k \in N. \end{cases}$$

$\left\{\lambda_n^{'}\right\} \in GM$ екенін байқау қиын емес.

Жалпыланған монотонды тізбекетерден құралған сандық қатарлар үшін Абель және Коши теоремалары орындалады.

Теорема 6 (GM үшін Абель теоремасы).

Егер $A = \{a_n\} \in GM$ және $\left\{\sum_{k=1}^{n} b_k\right\}$ тізбегі шенелген болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ қатары жинақты.

Теорема 7 (GM үшін Коши теоремасының жалпы түрі)

Егер $\{a_n\} \in GM$ болса, онда келесі қатарлардың $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{s=0}^{\infty} 2^s a_{2^s}$ жинақтылығы пара-пар.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Темірғалиев Н. Математикалық анализ 2. – Алматы: «Ана тілі», 1991. – 301 б.
2. Leskela L., Stenlund M. A dilution test for the convergence of subseries of a monotone series //Journal of Classical Analysis.2012, Vol.1, p.17-22.
3. L. Leindler, A new class of numerical sequences and its applications to sine and cosine series, Analysis Math., 28 (2002), 279-286.
4. R.J.Le, H.R.Zhang. A remark on the Abel's and Dirichlet's criterioms concerning generalizations to monotonicity//Journal of Classical Analysis. 2010, 153-158 p.
5. S. Tikhonov, Trigonometric series with general monotone coefficients, J. Math. Anal. Appl., 326, (2007), 721–735.