ӘОЖ: 511.174-026.191

КЕЙБІР АРИФМЕТИКАЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ АНАЙЫ ҚАЙТУЫЛДЫЛЫҒЫ

Утеева Ляйля Керимбековна
liailia.ahmetova@mail.ru
Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ, Механика-математика факультеті, «Алгебра және геометрия» кафедрасы магистранты (М010-математика)
Ғылыми жетекші – Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ ф-м ғ.к., доцент Қасымқанұлы Б.

Бұл жерде біз қарапайым есептелгіш (алгоритмен есептелетін) функциялардан жаңа функциялар құру амалдарын береміз. Оларды операторлар деп атаймыз. Ал қарапайым есептелгіш функциялар келесі функциялар:

$O(x) = 0$ – нөлдік функциясы,

$S(x) = x + 1$– келесі мәнге (келесі натурал санға) көшу функциясы,

$I_m^n(x_1, \dots , x_n) = x_m \quad , 1 \leq m \leq n$ – берілген n сандардың ішінен m-ші санды таңдап алатын функция.

Суперпозиция (ауыстыру) операторы. $f_1(x_1, \dots \dots , x_n)$, $f_2(y_1, \dots \dots\ y_m)$, … … , $f_{n+1}(y_1, \dots \dots , y_m)$ функциялары берілсін. n-орынды $g(y_1, \dots \dots , y_m)$ функциясы $f_1, f_2, \dots \dots , f_{n+1}$ функцияларынан *суперпозиция* (*ауыстыру*) *операторы* арқылы алынған дейміз, егер $y_1, \dots \dots , y_m$ айнымалылардың барлық мәндері үшін келесі теңдік орындалса

$$g(y_1, \dots \dots , y_m) = f_1\big(f_2(y_1, \dots \dots\ y_m), \dots \dots , f_{n+1}(y_1, \dots \dots , y_m)\big)\,.$$

Мысал үшін $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + xy + yz$, $f_2(x, y) = x + y$, $f_3(x, y, z) = x + yz$, $f_4(y, z, t) = yt + yz$ функциялары берілген болса, онда ауыстыру операторы арқылы келесі функцияларды

$$g_1(x, y, z, t) = (x + y)^2 + (x + yz)^2 + (x + y)(x + yz) + (x + yz)(yt + yz);$$

$$g_2(x, y, z) = (x^2 + y^2 + xy + yz)(x + yz) + (x^2 + y^2 + xy + yz)(x + y)$$

алуға болады. Мұнда g_1 функциясы f_1-дің x, y, z айнымалыларының орнына сәйкесінше f_2, f_3, f_4 функцияларын қойғаннан шығады, ал g_2 функциясы f_4-дің y, z, t айнымалыларының орнына сәйкесінше f_1, f_2, f_3 функцияларын қойғаннан шығады.

Анайы (қарапайым) қайтуыл операторы. $g(x_1, \dots, x_n)$, $h(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2})$ берілсін. $(n+1)$-орынды f функциясы g, h функциялардан *анайы қайтуыл операторы* арқылы алынған дейміз, егер $x_1, \dots \dots , x_n, y$ айнымалылардың барлық мәндері үшін

$$f(x_1, \dots \dots , x_n, 0) = g(x_1, \dots \dots , x_n),$$
$$f(x_1, \dots \dots , x_n, y + 1) = h\big(x_1, \dots \dots , x_n, y, f(x_1, \dots \dots , x_n, y)\big)$$

теңдіктері орындалса.

Мысалы: $g(x,y)$, $h(x,y,z,t)$ функциялары берілсін. $f(x,y,z)$ функциясы g,h функциялардан анайы қайтуыл операторы арқылы алынған болсын және $f(2,1,3)$ мәнән табу үшін бұл оператор қандай әрекет жасайтынын қарайық:

$$f(2,1,0) = g(2,1)$$
$$f(2,1,1) = h\big(2,1,0,f(2,1,0)\big)$$
$$f(2,1,2) = h\big(2,1,1,f(2,1,1)\big)$$
$$f(2,1,3) = h\big(2,1,2,f(2,1,2)\big)$$

Кішірейту операторы. $f(x_1,\dots,x_n,y)$ функциясы берілсін. $n-$ орынды g функциясы берілген f функциясынан *кішірейту операторы* арқылы алынған дейміз, егер $x_1, x_2, \dots, x_n$ айнымалылардың барлық мәндері үшін

$$g(x_1,\dots\dots,x_n) = \mu y(f(x_1,\dots\dots,x_n,y)=0)$$

теңдігі орындалса. Басқаша айтқанда $g(x_1,\dots\dots,x_n)$ функциясының мәндері $x_1, x_2, \dots, x_n$ айнымалылардың барлық мәндері үшін $f(x_1,\dots\dots,x_n,y)=0$ теңдеуінің ең кіші шешіміне тең болуы керек. Ал ең кіші шешімін табу әдісі келесі процедура арқылы табылады.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ айнымалылардың кез келген мәндер $x_1=a_1,\dots\dots,x_n=a_n$ үлестірейік. Содан кейін келесі теңдіктер орындалуын тексереміз:

$$f(a_1,\dots\dots,a_n,0) \neq 0,$$
$$f(a_1,\dots\dots,a_n,1) \neq 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f(a_1,\dots\dots,a_n,b-1) \neq 0$$
$$f(a_1,\dots\dots,a_n,b) = 0.$$

Осыдан $f(a_1,\dots\dots,a_n,y)=0$ теңдеуінің ең кіші шешімі b-ға тең екені байқалады, сондықтан $g(a_1,\dots\dots,a_n)=b$. Егер $f(a_1,\dots\dots,a_n,y)=0$ теңдеуінің шешімі болмаса, онда $g(a_1,\dots\dots,a_n)$-ң мәні анықталмаған болады.

Егер айнымалылардың кейбір мәндерінде функцияның мәні анықталмаған болса, онда оны *ішінара* функция деп атаймыз. Ал егер айнымалылардың барлық мәндерінде функцияның мәні анықталған болса, онда оны *барлық жерде анықталған* функция дейміз.

Анықтама. $f(x_1,\dots,x_n)$ функциясын *анайы қайтуылды* функция дейміз, егер ол қарапайым есептелгіш функцияларға суперпозиция және анайы қайтуыл операторларын ақырлы рет қолданғанынан шыққан болса.

Келесі функциялар қарастырайық:

$ex(x, y)$ – y санының канондық жіктеуіндегі x-ші жай санның дәреже көрсеткіші, бұл жерде $ex(x, 0) = 0$;

$lh(x)$ – x санының канондық жіктеуіндегі жай сандардың саныx, бұл жерде $lh(0)=0$;

$long(x)$ – x санының канондық жіктеуіндегі ең үлкен жай санның номері.

$k(x, y)$ – x пен y сандарының ең кіші ортақ еселігі, бұл жерде $k(x, 0) = k(0, y) = 0$

$d(x, y)$ – x пен y сандарының ең үлкен ортақ бөлгіші, бұл жерде $d(0, 0) = 0$

Теорема 1. $ex(x, y)$, $lh(x)$, $long(x)$, $k(x, y)$, $d(x, y)$ — анайы қайтуылды функциялар болып табылады.

Теорема 2. $min(x, y)$; $max(x, y)$; $[x\sqrt{2}]$; $[\sqrt[y]{x}]$, бұл жерде $[\sqrt[0]{x}] = \text{x}$; $[e^x]$; $[x \cdot e]$; C_x^y, бұл жерде $C_x^y = 1$ тең $y \geq x$ болғанда.

Әдебиет

1. А.И. Мальцев, Алгоритмы и рекурсивные функции, М., Наука, 1986, с. 367.
2. Ж. Роджерс, Теория рекурсивных функций и эффективное вычисление, М., Мир, 1972, с. 624.