

МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНОГО КОНВЕКТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ: ОТ ВЯЗКОГО ТЕЧЕНИЯ ДО ВОЗНИКНОВЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Ертлеуов Бакдәулет Ерланұлы

yertleuovv@gmail.com

магистрант ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Научный руководитель – К.О. Сабденов

Современные высокие технологий живут и развиваются в узком интервале температур: это видно на примере микроэлектроники, где используется слабый эффект от внешнего электрона полупроводников и его энергии Ферми. Другой яркий пример виден в биологии, здесь само существование живых организмов со всеми их уникальными свойствами можно рассматривать как использование огромного числа технологий, созданных самой природой в процессе эволюции. Сами же природные технологий основаны не только на сильной зависимости химических реакций от температуры, но и на сильных изменениях коэффициентов переноса (вязкость, диффузия, теплопроводность) от состава среды. Но состав среды может сильно меняться от температуры, как и коэффициенты переноса. Поэтому детальное исследование свойств сред и их движения на слабые изменения температуры представляет отдельный интерес.

Моделирование двумерного течения в прямоугольной области.

Рассматривается область с жидкостью в виде прямоугольника длиной a и высотой b в системе декартовых координат x и y (рис. 1). Жидкость находится в поле силы тяжести, направленной сверху вниз, ускорение свободного падения равно g , кинематическая вязкость жидкости обозначена как ν , ее температура T . Нижняя половина левой стороны прямоугольника с твердыми стенками находится при постоянной температуре T_{h1} , верхняя половина – при температуре

$$T_{h2}, T_{h2} < T_{h1};$$

правая сторона имеет температуру

$$T_0, T_{h2} < T_0 < T_{h1}.$$

На нижней и верхней границах теплообмен отсутствует.

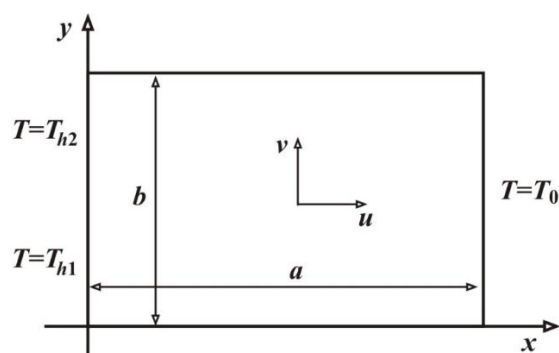


Рисунок 1 - Область течения жидкости и граничные условия для температуры

Вектор скорости жидкости \mathbf{V} состоит из двух компонент u и v :

$$\mathbf{V} = iu + jv, \quad (2.1)$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} – соответственно единичные векторы координат x и y . Течение в прямоугольнике двумерное, что означает не только наличие только двух компонент скорости, но также эти скорости являются функциями времени t и только двух пространственных переменных: $u(t, x, y)$ и $v(t, x, y)$.

Такое движение описывается уравнениями Навье–Стокса [1, 2]

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

Здесь p – давление; ρ – плотность жидкости. Уравнения Навье–Стокса после применения к этим выражениям операции **rot** можно записать в переменных «функция тока – вихрь» [3, 4], для них приняты обозначения (функция тока) ψ и (вихрь) Ω . Вихрь имеет только одну ненулевую компоненту

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

скорости u и v определяются через функцию тока:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.2)$$

Для исследования динамики жидкости при относительно малых отклонениях температуры от среднего значения достаточно рассматривать уравнения в приближении Буссинеска [5, 6]

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right) + g \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\Omega, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (2.5)$$

где κ – коэффициент температуропроводности. Перейдем в уравнениях (2.3)–(2.5) к безразмерным координатам x' , y' и времени τ согласно равенствам

$$x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{b}, \quad t' = \frac{t}{t_*}, \quad t_* = \sqrt{\frac{b}{g}}.$$

Относительно этих безразмерных переменных уравнения (2.3)–(2.5) запишутся как

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t'} + \frac{t_*}{a} u \frac{\partial \Omega}{\partial x'} + \frac{t_*}{b} v \frac{\partial \Omega}{\partial y'} = \frac{1}{\text{Re}} \left(s \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y'^2} \right) + \frac{b}{t_* a T} \frac{\partial T}{\partial x'}, \quad (2.6)$$

$$s \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2} = -b^2 \Omega, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t'} + \frac{t_*}{a} u \frac{\partial T}{\partial x'} + \frac{t_*}{b} v \frac{\partial T}{\partial y'} = \frac{1}{\text{Pr Re}} \left(s \frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y'^2} \right) \quad (2.8)$$

Содержащиеся здесь безразмерные числа определены как

$$s = \frac{b^2}{a^2}, \quad \text{Re} = \frac{b^2}{t_* v}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}$$

На твердых стенках задаются нулевые граничные условия для функции тока:

$$1) \text{ на левой и правой границах } \psi_{0,j} = 0; \quad \psi_{N_x-1,j} = 0; \quad (2.9)$$

$$2) \text{ на нижней и верхней границах } \psi_{i,0} = 0; \quad \psi_{i,N_y-1} = 0$$

В них нет индекса номера итерации n , поскольку указывать его не имеет смысла: функция тока в четырех условиях (2.9) определена на текущей итерации.

Результаты

Исследовалось качественное изменение течения в зависимости от числа Архимеда, определенного как

$$\text{Ar} = \frac{T_{h1} - T_0}{T_0} \frac{l}{\nu} \sqrt{gl}, \quad l = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Геометрические размеры $a = 0,28$, $b = 0,45$ м;

- кинематическая вязкость газа $\nu = 3 \cdot 10^{-5}$ м²/с;
- температура $T_0 = 280$ К;
- число Прандтля $\text{Pr} = 0,75$;
- ускорение свободного падения $g = 9,81$ м/с².
- Числа узлов по координатам $N_x = 101$, $N_y = 101$;
- число итерации для уравнения (11) на каждом шаге по времени равно 100.

Число Ar менялось варьированием температур левой стенки T_{h1} и T_{h2} . Моделирование проводится с начальными условиями

$$t' = 0: \quad \Omega = 0; \quad \psi = 0;$$

$$T = T_{h1} - (T_{h1} - T_0)x', \quad 0 < y' \leq b/2;$$

$$T = T_{h2} - (T_{h2} - T_0)x', \quad b/2 < y' < b.$$

Расчет начинается с малых отклонений температуры левой и правой стенок: при $T_{h1} = 285$ К, $T_{h2} = 280$ К разность температуры равна $\Delta T = T_{h1} - T_{h2} = 5$ К. Возникающее движение жидкости характеризуется числом Архимеда $\text{Ar} = 1507$. Внесенные начальными условиями возмущения со временем затухают с колебаниями, и в прямоугольной области устанавливается стационарное течение, это обнаруживается в зависимости скоростей u и v в центре прямоугольника (рис. 2).

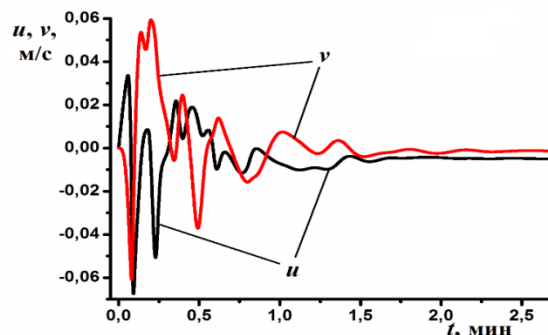


Рисунок 2 - Затухание колебаний скоростей u и v в центре прямоугольника ($T_{h1} = 285$ К, $T_{h2} = 280$ К, $\text{Ar} = 1507$)

Такие же изменения наблюдаются и для температуры и его производных по координатам и не только в центре области, но и в других произвольно выбранных точках. Рассмотрим результаты в момент времени $t = 2.7$ мин: расположение и форма изолинии функции тока (рис. 3) указывает на наличие трех вихрей. Распределения скоростей u и v на различных высотах приведено на рис. 4.

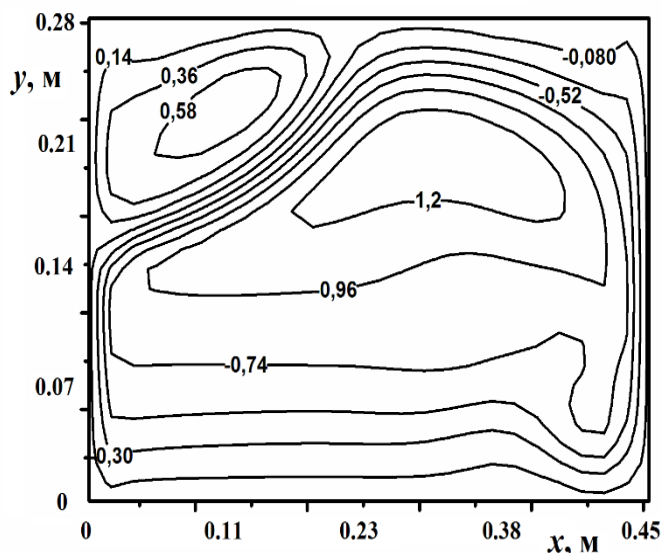


Рисунок 3 - Изолинии функции тока ψ , $10^{-3} \cdot \text{м}^2/\text{с}$ ($T_{h1} = 285 \text{ К}$, $T_{h1} = 280 \text{ К}$, $\text{Ar} = 1507$).

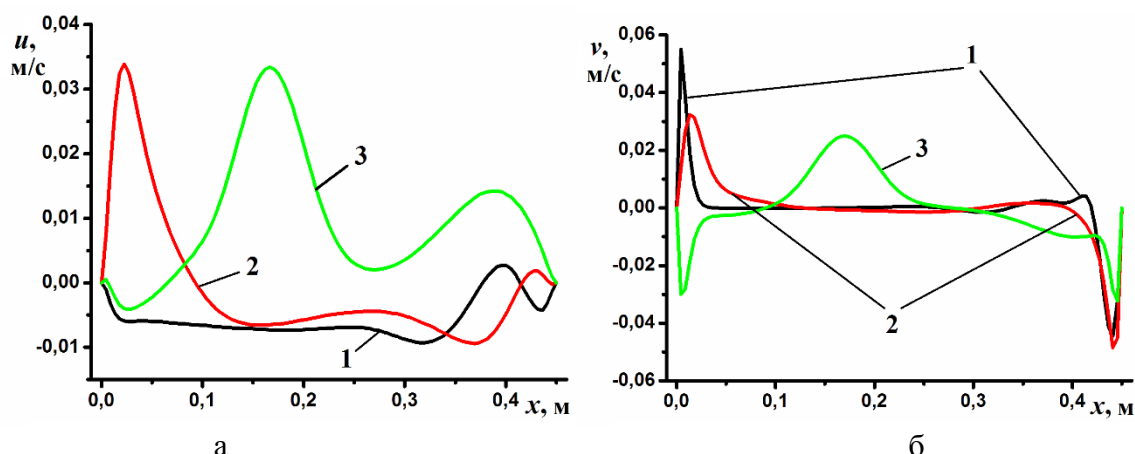


Рисунок 4 - Зависимости от координаты x скорости u (а) и v (б) на различных высотах y ($T_{h1} = 285 \text{ К}$, $T_{h1} = 280 \text{ К}$, $\text{Ar} = 1507$): 1 $-y = b/4$; 2 $-y = b/2$; 3 $-y = 3b/4$ м.

Заключение и выводы

Итак, в работе путем проведения вычислительного эксперимента проведено исследование свободного конвективного движения вязкой жидкости в прямоугольной области размерами $a = 0.28$, $b = 0.45$ м. Для получения решения нестационарных уравнений Навье–Стокса они записывались в переменных функция тока/вихрь, после чего применялась неявная схема. Получены различные решения при плавном изменении перепада температуры на одном из границ, а результаты представлены через критерий Архимеда, зависящего от указанного перепада температуры.

По результатам исследования можно сделать следующие выводы:

- разработан программный код на языке программирования C++, предназначенный для получения решений уравнений Навье–Стокса с помощью компьютера;

- даже небольшой перепад температуры на левой и правой стенках ($T_{h1} = 284 \text{ K} = 11 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_{h2} = 3 \text{ }^\circ\text{C}$, $\Delta T = 8 \text{ K} = 8 \text{ }^\circ\text{C}$, $Ar = 1206$) приводит к возникновению нестационарного режима течения, которое диагностируется как динамический хаос;
- в малой области, примыкающей к твердым поверхностям стенок, возникает течение, подобное пограничному слою;
- критическое число Архимеда, когда возникает хаотическое движение, оценивается примерно $Ar = 624$, чему соответствует перепад температуры $\Delta T = 4,6 \text{ }^\circ\text{C}$, до этого наблюдается только вязкое стационарное движение;
- при больших перепадах температуры стационарное движение жидкости невозможно;
- в прямоугольной области возникает три устойчивых крупных вихря, 4-5 более мелких вихрей возникают и исчезают только периодически;
- сами крупные вихри находятся в постоянном движении, но вблизи некоторого среднего положения в пространстве.

Список использованной литературы

1. *Energy Plus. Engineering Reference*. Ed. Orlando E. University Illinois and University of California, 2013. <http://energy.gov/eere/office-energy-efficiency-renewable-energy>.
2. Сабденов К.О. Минимаксный анализ экономической и энергетической эффективностей трубопроводов теплоснабжения // Инженерно-физический журнал.– 2016. – Т. 89, №6. – С. 1421–1429.
3. Sabdenov K.O., Baitasov T.M. Optimal (energy efficient) heat supply to buildings in central heating system // Bulletin of the Tomsk Polytechnic University, Geo Assets Engineering. – 2015. - 326(8). - P. 53–59.
4. Табунщиков Ю. А., Бродач М. М. Математическое моделирование и оптимизация тепловой эффективности зданий. – М.: АВОК-ПРЕСС, 2002.
5. Shunian Qiu, Fan Feng, Weijie Zhang, Zhengwei Li, Zhenhai Li. Stochastic optimized chiller operation strategy based on multi-objective optimization considering measurement uncertainty // Energy & Buildings. – 2019. – Vol. 195. – P. 149–160.
6. Dahai Qi, Sherif Goubran, Liangzhu (Leon) Wang, Radu Zmeureanu. Parametric study of air curtain door aerodynamics performance based on experiments and numerical simulations // Building and Environment. – 2018. – Vol. 129. – P. 65–73.