УДК 530.182

КАЛИБРОВОЧНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ НЕЛОКАЛЬНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА-МАКСВЕЛЛА-БЛОХА И ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЛАНДАУ-ЛИФШИЦА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Нұрбаева Зерде Аманкелдіқызы
nur.zerde98@gmail.com
Студент 4 курса специальности «5В060400-Физика», старший преподаватель, кафедра общей и теоретической физики, ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – Ж.М.Сагидуллаева

В данной статье доказывается калибровочная эквивалентность нелокального нелинейного уравнения Шредингера-Максвелла-Блоха и нелокального уравнения Ландау-Лифшица с самосогласованным потенциалом. Рассмотрены пространственная и пространственно-временная нелокальности. Приведены нелокальные системы уравнений и соответствующие им представления Лакса.

Нелокальность в физике меняет представления о пространстве и времени таким образом, что x, t, i преобразуются в $x \to \epsilon_x x$, $t \to \epsilon_t t$, $i \to \epsilon i$. Об этом подробно было показано в $[1-2]$ работах, где нелокальное уравнение Шредингера сохраняет инвариант с x, t, i и описывает распространения волн в PT-симметричных средах. Здесь P оператор, соответствующий пространственному отражению и имеет вид $x \to -x$, $\partial_x \to -\partial_x$, а T соответствует инверсии по времени $t \to -t$, $\partial_t \to -\partial_t$, $i \to \epsilon i$. Так же в [3], используя нелокальное нелинейное уравнение Шредингера, помимо его солитонных решений, было представлено обращение времени с нулевыми граничными условиями на бесконечности. А нелокальное уравнение Шредингера и Максвелла-Блоха подробно изучалось в работе [4] и было записано как

$$iq_t + q_{xx} + 2\delta|q|^2 q - 2ip = 0, \tag{1}$$

$$p_x - 2i\omega p - 2\eta q = 0, \tag{2}$$

$$\eta_x + \delta(q^* p + p^* q) = 0. \tag{3}$$

Здесь $q = q(x,t)$ и $p = p(x,t)$ комплексные функции, тогда как q^*, p^*- комплексные сопряжения, $\eta = \eta(x,t)$ является вещественной функцией. Так же $\omega = const, \delta = \pm 1$, $*$ – обозначает комплексное сопряжение.

Далее запишем переопределенную систему дифференциальных уравнений, условие совместности которых дает систему уравнений $(1)-(3)$

$$\Phi_x = U\Phi, \tag{4}$$

$$\Phi_t = V\Phi, \tag{5}$$

где U, V — матричные 2×2 комплекснозначные функции x, t

$$V = 2\lambda U + B. \tag{6}$$

Матричные операторы данной системы U, B имеют вид

$$U = -i\lambda\sigma_3 + U_0, \tag{7}$$

$$B = B_0 + \frac{i}{\lambda+\omega} B_{-1}. \tag{8}$$

Здесь B_0, B_{-1}, U_0 запишутся как

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 & q \\ -q^* & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$B_0 = -\delta|q|^2\sigma_3 + i\begin{pmatrix} 0 & q_x \\ \delta q^* & 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$B_{-1} = \begin{pmatrix} \eta & -p \\ -p^* & -\eta \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Уравнение Ландау-Лифшица моделирует динамику нелинейных физических процессов для описания движения вектора намагниченности. А в свою очередь, волны намагниченности можно рассматривать как солитоны, которые имеют свойство сохранять форму и скорость при распространении или после взаимодействия. В [5] обсуждались различные аспекты применения уравнения Ландау-Лифшица. А в [6] было рассмотрено обобщенное уравнение Ландау-Лифшица (ОУЛЛ) с самосогласованным потенциалом с использованием (1+1)- мерного измерения. ОУЛЛ с самосогласованным векторным потенциалом в матричном виде представляется [6]

$$iS_t + \frac{1}{2}[S, S_{xx}] + \frac{1}{\omega}[S, W] = 0, \tag{12}$$

$$iW_x + \omega[S, W] = 0, \tag{13}$$

где $\omega = const$, $S = \sigma_{j=1}^{3} S_j(x,y,t)\sigma_j$ обозначает аналог спинового вектора в матричной форме. Матричный вид векторного потенциала $W = \sigma_{j=1}^{3} W_j(x,y,t)\sigma_j$ и матрицы спина

$$S = \begin{pmatrix} S_3 & S^- \\ S^+ & -S_3 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} W_3 & W^- \\ W^+ & -W_3 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

Для ОУЛЛ с самосогласованным потенциалом существует следующее представление Лакса

$$\Phi_x = U\Phi, \tag{15}$$

$$\Phi_t = V\Phi, \tag{16}$$

где U и V - комплексные матрицы 2×2, которые запишутся в виде

$$U = -i\lambda S,$$
$$V = \lambda^2 V_2 + \lambda V_1 + \left(\frac{i}{\lambda+a} - \frac{i}{a}\right) W.$$

Здесь

$$V_2 = -2iS, \quad V_1 = SS_x.$$

План работы: доказать калибровочную эквивалентность нелокального нелинейного уравнения ШМБ и ОУЛЛ с самосогласованным потенциалом.

КАЛИБРОВОЧНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

Калибровочная эквивалентность применяется в уравнениях, которые могут быть условием совместности системы линейных дифференциальных уравнений. Впервые понятие калибровочной эквивалентности было представлено в [1], где оно более детально расписано для локальных уравнений. А в [7] был найден калибровочно эквивалентный аналог нелокального нелинейного уравнения Шредингера. В работе [4] представили нелокальное нелинейное уравнение Шредингера и Максвелла-Блоха, интегрируемость, которого подтверждается условием существования для него пары Лакса. В [8] обратили внимание на применяемость калибровочной эквивалентности для многомерных интегрируемых уравнений. Как мы видим, данный метод — важный инструмент в математической физике, что доказывается в работе [9]. Особо отметим, что калибровочная эквивалентность совершенствует способы построения нелинейных уравнений, к которым применяется.

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ НЕЛОКАЛЬНОСТЬ

Здесь у нас будет меняться только координата пространства, таким образом, что при переходе к нелокальным уравнениям изменятся только комплексно сопряженные функции $(x \to \epsilon_x x,\ t \to t)$. Соответственно с этим переобразованиям U, V поменяются, однако пары Лакса не изменятся как и матричные операторы, приняв вид уравнений $(4)-(8)$.

Матричные операторы $(9)-(11)$ в случае пространственной нелокальности изменятся на следующие

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 & q(x,t) \\ -q^*(\epsilon_x x,t) & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_0 = -\epsilon i\delta q^*(\epsilon_x x,t)q(x,t)\sigma_3 + i\begin{pmatrix} 0 & q_x \\ \delta q^*(\epsilon_x x) & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{-1} = \begin{pmatrix} \eta(x,t) & -p(x,t) \\ -p^*(\epsilon_x x,t) & -\eta(x,t) \end{pmatrix}.$$

Для установления калибровочной эквивалентности рассмотрим спектральную задачу, условием совместности, которой является уравнение ШМБ $(4)-(5)$. Далее введем следующее преобразование [1]

$$\Phi_1 = g\Phi_2, \tag{17}$$

где $g = \Phi|_{\lambda=0}$, Φ_1 - решение спектральной задачи ШМБ, а Φ_2 - ОУЛЛ. Завершив данную операцию, выводим U_2, V_2 из U_1, V_1. Тогда решение принимает вид

$$U_2 = -\epsilon i\lambda g^{-1}\sigma_3 g + g^{-1}U_0 g - g^{-1}g_x, \tag{18}$$

$$V_2 = 2\lambda g^{-1}Ug + g^{-1}Bg - g^{-1}g_t. \tag{19}$$

Матрица перехода g в общем виде представлена как

$$g = \begin{pmatrix} g_1(x,t) & -g_2^*(\epsilon_x x,t) \\ g_2(x,t) & g_1^*(\epsilon_x x,t) \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Учитывая следующие ревенства [1]

$$S = g^{-1}\sigma_3 g, \tag{21}$$

$$SS_x = -S_x S = g^{-1}g_x - g^{-1}\sigma_3 g_x \sigma_3 g = g^{-1}g_x - g^{-1}\sigma_3 A_0 \sigma_3 g = 2g^{-1}g_x. \tag{22}$$

$$W = g^{-1}B_{-1}g, \tag{23}$$

выводим пары Лакса ОУЛЛ с самосогласованным потенциалом из условия нулевой кривизны, что получим следующие уравнения

$$iS_t + \frac{1}{2}[S, S_{xx}] + \frac{1}{\omega}[S, W] = 0, \tag{24}$$

$$iW_x + \omega[S, W] = 0. \tag{25}$$

Система уравнений $(24) - (25)$ является нелокальным уравнением типа Ландау-Лифшица с самосогласованным потенциалом.

Используя (20) подставим его в (21) и (23), откуда докажем, что

$$S = \frac{1}{g_1 g_1^* + g_2 g_2^*}\begin{pmatrix} g_1^* g_1 - g_2^* g_2 & -2g_1^* g_2^* \\ -2g_1 g_2 & g_2 g_2^* - g_1 g_1^* \end{pmatrix},$$

$$W = \frac{1}{g_1 g_1^* + g_2 g_2^*}\begin{pmatrix} g_1^*\eta g_1 - g_2^* p^* g_1 - g_1^* p g_2 - g_2^*\eta g_2 & -g_1^*\eta g_2 + {g_2^*}^2 p^* - {g_1^*}^2 p - g_2^*\eta g_1^* \\ -g_2\eta g_1 - g_1^2 p^* + g_2^2 p - g_1\eta g_2 & g_2\eta g_2^* + g_1 p^* g_2^* + g_2 p g_1^* - g_1\eta g_1^* \end{pmatrix},$$

и видим, что несмотрся на внешнее сходство с ОУЛЛ с самосогласованным потенциалом, за счет нелокальности в (20) уравнения $(24) - (25)$ имеет совершенно другую природу. Здесь $g_j^* = g_j^*(\epsilon_x x, t)$, $g_j = g_j(x,t)$, $p_j^* = p_j^*(\epsilon_x x, t)$, $p_j = p_j(x,t)$, $j = 1,2$.

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ НЕЛОКАЛЬНОСТЬ

В этом разделе рассмотрим нелокальность по координатам пространства и времени, используя преобразования запишем $x \to \epsilon_x x, t \to \epsilon_t t, i \to \epsilon i$. Пары Лакса нелокального нелинейного уравнения ШМБ не изменятся, что останутся в виде уравнений $(4) - (5)$. А U и V в пространственно-временной нелокальности изменятся согласно

$$U = -\epsilon i\lambda\sigma_3 + U_0,$$

$$B = B_0 + \frac{\epsilon i}{\lambda + \omega} B_{-1}.$$

Здесь

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 & q(x,t) \\ -q^*(\epsilon_x x, \epsilon_t t) & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_0 = -\epsilon i\delta|q|^2\sigma_3 + i\begin{pmatrix} 0 & q_x(x,t) \\ \delta q^*(\epsilon_x x, \epsilon_t t) & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{-1} = \begin{pmatrix} \eta(x,t) & -p(x,t) \\ -p^*(\epsilon_x x, \epsilon_t t) & -\eta(x,t) \end{pmatrix}.$$

Для данного случая перехода матрица g в нелокальном обращении пространственно-времени выглядит как

$$g = \begin{pmatrix} g_1(x,t) & -g_2^*(\epsilon_x x, \epsilon_t t) \\ g_2(x,t) & g_1^*(\epsilon_x x, \epsilon_t t) \end{pmatrix}. \qquad (28)$$

Далее выведем и запишем новые матричные операторы для ОУЛЛ с самосогласованным потенциалом как

$$U_2 = -\epsilon i\lambda g^{-1}\sigma_3 g + g^{-1}U_0 g - g^{-1}g_x, \qquad (29)$$

$$V_2 = 2\lambda g^{-1}Ug + g^{-1}Bg - g^{-1}g_t. \qquad (30)$$

Аналогично $(24)-(25)$ из условия нулевой кривизны получим нелокальное ОУЛЛ с самосогласованным потенциалом

$$\epsilon i S_t + \frac{1}{2}[S, S_{xx}] + \frac{1}{\omega}[S, W] = 0, \qquad (31)$$

$$\epsilon i W_x + \omega[S, W] = 0. \qquad (32)$$

Необходимо добавить, что структура матриц S и W изменится аналогично $(31)-(32)$ и примет вид

$$S = \frac{1}{g_1 g_1^* + g_2 g_2^*}\begin{pmatrix} g_1^* g_1 - g_2^* g_2 & -2g_1^* g_2^* \\ -2g_1 g_2 & g_2 g_2^* - g_1 g_1^* \end{pmatrix},$$

$$W = \frac{1}{g_1 g_1^* + g_2 g_2^*}\begin{pmatrix} g_1^*\eta g_1 - g_2^* p^* g_1 - g_1^* p g_2 - g_2^*\eta g_2 & -g_1^*\eta g_2 + {g_2^*}^2 p^* - {g_1^*}^2 p - g_2^*\eta g_1^* \\ -g_2\eta g_1 - g_1^2 p^* + g_2^2 p - g_1\eta g_2 & g_2\eta g_2^* + g_1 p^* g_2^* + g_2 p g_1^* - g_1\eta g_1^* \end{pmatrix}.$$

Уравнения $(31)-(32)$ представляет собой не что иное, как нелокальное уравнение типа обобщенного уравнения Ландау-Лифшица с самосогласованным потенциалом, калибровочно эквивалентное нелокальному уравнению Шредингера-Максвелла-Блоха.

В данной работе приведен калибровочно эквивалентный аналог нелокального уравнения ШМБ, а именно нелокальное ОУЛЛ с самосогласованным потенциалом. Калибровочная эквивалентность рассмотренных уравнений позволяет построить решение искомого уравнения, при изместном тривиальном решении другого. Также отметим тот факт, что калибровочно эквивалентные уравнения имеют некоторую симметрию, прослеживающуюся при нахождении законов сохранения и интегралов движения, а также данные уравнения имеют схожесть билинейных форм. На примере данных уравнений доказано, что несмотря на идентичность внешней структуры компоненты спиновой матрицы "различаются".

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан, грант.

Список использованных источников

1. Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А. Эквивалентность нелинейного уравнения Шредингера и уравнения ферромагнетика Гейзенберга // Теоретическая и математическая физика –1979. –Т.38. №1. –С. 26–35.

2. Li-Yuan Ma, Zuo-Nong Zhu. Nonlocal nonlinear Schrodinger equation and its discrete version: Soliton solutions and gauge equivalence// Journal of Mathematical Physics. – 2016. – Vol.57. – P.083507; doi: http://dx.doi.org/10.1063/1.4960818

3. M.J. Ablowitz and Z.H. Musslimani, Phys. Rev. lett. Inverse scattering transform for the nonlocal reverse space–time nonlinear Schrodinger equation.

4. Myrzakul Sh.R., Gudekli E., Syzdyk A.M., Yesmakhanova K.R. The nonlocal nonlinear Schrodinger and Maxwell – Bloch equation

5. Звездин А. К., Звездин К. А., Хвальковский А. В. Обобщенное уравнение Ландау–Лифшица и процессы переноса спинового момента в магнитных наноструктурах

6. Sagidullayeva Zh.M. On the gauge equivalence of the two-layer M-XCIX equation and the two-component Schrodinger-Maxwell-Bloch equation.

7. Gadzhimuradov T. A., Agalarov A. M. Gauge equivalence of nonlocal NLSE and PTsymmetric Heisenberg ferromagnetic equation.

8. Липовский В.Д., Широков А.В. Пример калибровочной эквивалентности многомерных интегрируемых уравнений // Функциональный анализ и его приложения –1989. –Т.23. №3. –С. 65–66.

9. Захаров В. Е., Манаков С. В. ТМФ, 19, 3,1974.

УДК 834

КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЙНШТЕЙНА-ЯНГА-МИЛЛСА С k-ЭССЕНЦИЕЙ

[1]Нұржау Н.Б., [2]Кутум Б.Б.
nurziya.nurzhau@mail.ru
[1]Студент 4 курса специальности 5B060400-физика, [2]докторант PhD 3 курса специальности 6D060400-физика, кафедра общей и теоретической физики,
ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – О.В. Разина

В нашей модели действие имеет вид

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}[R - F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a} + 2K(X,\phi)], \tag{1}$$

где -метрический тензор, R-скалярная кривизна, $F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}$-член Янга-Миллса,$F^a_{\mu\nu}$ - обычный тензор напряженности поля Янга-Миллса, K-лагранжиан k-эссенции [1-3].

В качестве метрики пространства-времени выберем метрику Фридмана-Робертсона-Уокера (ФРУ)

$$ds = -dt + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{2}$$

Следующим этапом является нахождение члена Янга-Миллса для метрики ФРУ (2)

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + \varepsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu, \tag{3}$$

где под ∂_μ понимается ковариантная производная, A^a_μ - потенциал калибровочной группы SU(2) поля Янга-Миллса. Выберем анзац решения для тензора потенциала в виде

$$A^a_\mu = (0, A^1_1(t), A^2_2(t), A^3_3(t)). \tag{4}$$