ӘОЖ 514.01

ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ӘДІСПЕН КЕЙБІР АЛГЕБРАЛЫҚ ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУ

Тамбетова Жулдыз Курманказыевна
zhuldyz.1511@mail.ru
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
6М0109000 – математика мамандығының 1 курс магистранты, Нұр-Сұлтан қ.
Ғылыми жетекшісі - Т.Туканаев

Математика мен геометрия - өзара жақын пәндер. Оларды бір-бірінен ажыратып қарай алмаймыз. Соның ішінде геометрия курсы математиканы оқытуда үлкен орынға ие. Геометрия — логикалық ойлауға, кеңістікті қиялмен елестетуге деген мүмкіндіктерге бай бірегей мектеп пән. Геометрия курсын оқытуда міндетті түрде теоремаларды дәлелдеудің, есептерді шығарудың әртүрлі әдістері қарастырылады. Олардың ішінде атап айтар болсақ, векторлық әдіс, координат әдісі және геометриялық түрлендірулер әдісі, т.с.с. Осы орайда математикалық тапсырмалардың бірнеше шығарылу жолдары бар, алгебралық мазмұнда берілген есептердің геометриялық әдістермен шығарылуына бірнеше мысалдарды қарастырып өтейік.

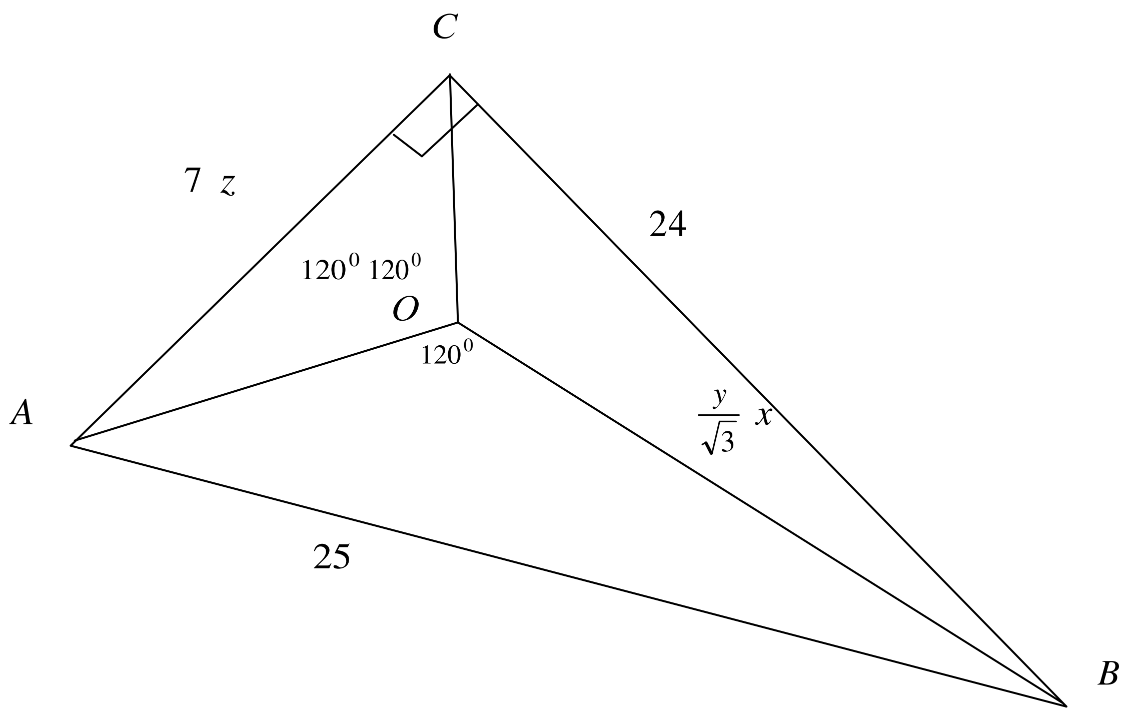
1-мысал. $\begin{cases} x^2+\dfrac{yx}{\sqrt{3}}+\dfrac{y^2}{3}=625 \\ \dfrac{y^2}{3}+z^2+\dfrac{yz}{\sqrt{3}}=49 \\ x^2+z^2+xz=576 \end{cases}$, $x, y, z>0$ теңдеулер жүйесі берілсін. x, y, z айнымалылардың мәндерін таппай, бірден $\sqrt{3}xz+y(x+z)$ өрнегінің мәнін табыңдар.

Шешімі. Бұл өрнектің мәнін анықтау үшін міндетті түрде x, y, z мәндерін жеке-жеке табуға болады. Сосын өрнектің мәнін табамыз. Бірақ есептің шарты бойынша бірден өрнектің мәнін табу керек. Және айнымалылардың мәндерін есептеп табу оқушыларға қиын болу әбден мүмкін. Сондықтан бұл есепті геометриялық әдіспен шығаруды қарастырамыз. Берілген жүйені келесі түрде жазайық:

$$\begin{cases} 25^2=x^2+\left(\dfrac{y}{\sqrt{3}}\right)^2-2x\cdot\dfrac{y}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) \\ 7^2=\left(\dfrac{y}{\sqrt{3}}\right)^2+z^2-2z\cdot\dfrac{y}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) \\ 24^2=x^2+z^2-2x\cdot z\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 15^2 = x^2 + \left(\frac{\sqrt{2}y}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}xy\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ 9^2 = \left(\frac{\sqrt{2}y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}z\right)^2 \\ 12^2 = x^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}z\right)^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}xz\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

Бұл жүйедегі әрбір теңдік косинустар теоремасының формуласын беріп отыр. Осыған сәйкес мынадай үшбұрышты саламыз.



Осы үшбұрыштардан құралған Δтікбұрышты ABC үшбұрышы шықты, себебі Пифагор үштіктері орындалады. Енді осы үшбұрыштардың аудандарын есептейміз.

$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 24 = \frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot x\cdot z\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}\cdot z\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$84 = \frac{1}{4}xy + \frac{\sqrt{3}}{4}xz + \frac{1}{4}yz$$

Сонда,

$$\sqrt{3}xz + y(x+z) = 336\,.$$

Осы тәрізді теңдеулер жүйесін өзіміз құрастыруымызға да болады. Ол үшін біз мынадай алгоритмды ұсынамыз. ABC тікбұрышты үшбұрышын сызамыз. Оның қабырғалары Пифагор үштіктері болсын. ABC үшбұрышының ішінен O нүктесін белгілеп таңдаймыз. $\angle AOC, \angle BOC, \angle AOB$ бұрыштарының қосындысы 360^0 болғандықтан, оларды тригонометриялық кестеден аламыз. Мысалы, $135^0, 135^0, 90^0$ немесе $120^0, 120^0, 120^0$ т.с.с. Пайда болған AOC, BOC, AOB үшбұрыштарының қабырғаларын $x, y, z > 0$ болатындай өрнектейміз. AOC, BOC, AOB үшбұрыштардың әрбіреуіне косинустар формуласын қолданып теңдеулер жүйесін құрамыз. $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC}$ аудандарды есептеу барысында пайда болған өрнектің мәнін есепте деп құрастырған жүйемізге шарт қоямыз.

2-мысал. $\begin{cases} 2x+3y=17 \\ \sqrt{(x-1)^2+(y-7)^2}+\sqrt{(x-7)^2+(y+1)^2}=10 \end{cases}$

Шешімі: Бұл есепті алгебралық әдіспен де геометриялық әдіспен де шығаруға болады. Біз осы есепті геометриялық әдіспен шығару жолын қарастырайық. Берілген жүйедегі екінші теңдеуден екі қосылғыш екі шеңбердің радиустарының қосындысын береді. Осы шеңберлердің центрлерін тауып, арақашықтығын есептейік:

Сонда, бірінші шеңбердің радиусы $R_1 = \sqrt{(x-1)^2+(y-7)^2}$, ал оның центрі $O_1(1;7)$ болады. Екінші шеңбердің радиусы $R_2 = \sqrt{(x-7)^2+(y+1)^2}$, ал оның центрі $O_2(7;-1)$ болады. $R_1+R_2=10$ және $|O_1O_2| = \sqrt{(7-1)^2+(-1-7)^2}=10$ болғандықтан, келесідей аламыз $R_1+R_2=|O_1O_2|$.

Сонымен, егер $M(x,y)$ болса, онда екінші теңдеуді келесідей түсінуге болады $AM+BM=AB$, яғни $M \in AB$ немесе $1 \le x \le 7, -1 \le y \le 7$.

Сондықтан, шеңберлердің центрлерін қосатын түзудің теңдеуін жазсақ, жүйедегі екінші күрделі теңдеуіміз жай сызықты теңдеуге келеді. Яғни,

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\frac{x-1}{7-1}=\frac{y-7}{-1-7}$$

Бұдан, $8x+6y=50$ теңдеуін аламыз. Теңдеуді 2-ге бөлген жағдайда $4x+3y=25$ түрге келеміз. Сонымен, берілген теңдеулер жүйесі келесі жүйеге келеді:

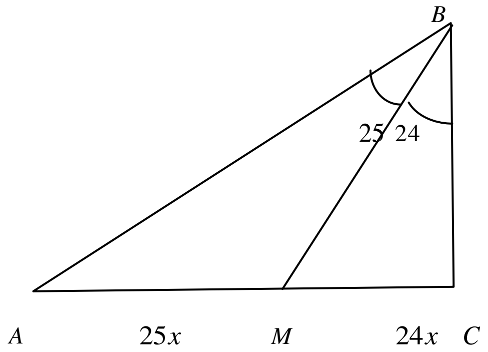
$$\begin{cases} 2x+3y=17 \\ 4x+3y=25 \end{cases}$$

Осы теңдеулердің графиктерінің қиылысу нүктесі теңдеулер жүйесінің шешімі болады.

Жауабы: $x=4,\ y=3$.

3- мысал. Есептеңіз: $ctg\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{24}{25}\right)$

Шешімі: Егер тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышының косинус және котангенсі ұғымын, Пифагор теоремасын және үшбұрыштың бұрышының биссектрисасының қасиетін қолдансақ, онда тапсырманың шешімін оңай табамыз. Төмендегі суретте ABC тікбұрышты үшбұрыш бейнеленген. Мұнда, $\angle ACB = 90^0$, $AB=25,\ BC=24$, BM - $\angle ABC$ бұрыштың биссектрисасы.



Онда, биссектрисаның қасиеті бойынша $MC = 24x,\ AM = 25x$ және $AC = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$, яғни $x = \frac{1}{7}$.

Сонымен, $ctg\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{24}{25}\right) = \frac{BC}{MC} = \frac{1}{x} = 7$.

Жоғарыда көрсетілеген мысалдар бойынша бірнеше есептерді келтіруге болады. Сонымен, алгебралық есептерді геометриялық тәсілмен шешудің артықшылықтары:

- Есепті аталған тәсілмен шығару барысында іс әрекет нақтыланады;
- Графикалық сызба анализ жасауға, теңдеуді құруға сонымен бірге есептің бірнеше шешімін табуға атсалысады;
- Оқушылардың графикті қолдану ауқымы кеңейеді;
- Есептерді шешу техникасы нақтыланады;
- Пәнішілік (алгебра және геометрия) сонымен бірге пәнаралық (математика және физика) байланыстар нығаяды
- Осы есептер арқылы оқушының өзінің шығармашылығын дамытуға жол ашылады.

Қолданылған әдебиеттер тізімі:

6. Куликова Л. В.,Литвинова С. А. За страницами учебника математики. – М.: Глобус, 2008.
7. Генкин Г.З. Геометрические решение негеометрических задач. – М.: Просвещение, 2007.