

ГИРОСКОПТЫҢ КИНЕТИКАЛЫҚ ЭНЕРГИЯСЫ

Б. Әсемжар, А. Жандеш, К. Жаркенов

asemzhar@mail.ru

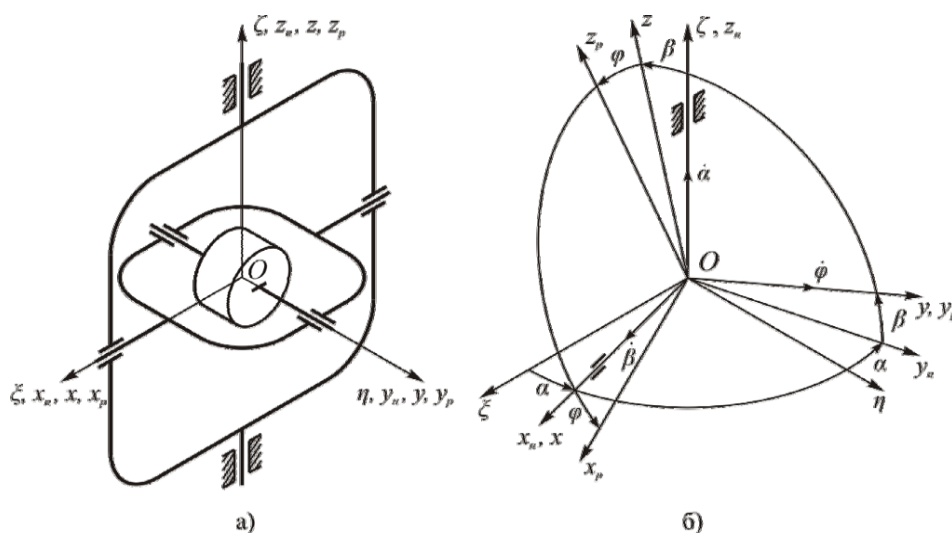
Л. Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Ғылыми жетекшісі – тех. ғ. к., доцент Б. Бостанов

Мәселенің қойылымы. Қатты денені қозғалмайтын бір нүктеге қатысты еркін айналымға мүмкіндік беретіндей етіп бекітудің кеңінен таралған түрі – сыртқы кардандық ілініс. Кардандық аспа дененің қозғалмайтын бір нүктені үш бұрыш арқылы бұрылуға мүмкіндік береді. Үш еркіндік дәрежесі бар гироскоптың толық кинетикалық энергиясын жалпыланған жылдамдықтар арқылы анықтау қажет.

Материалдар және нәтижелерді талқылау. Гироскоп теориясы сфералық қозғалыс жасайтын қатты дененің кинематикасы мен динамикасына негізделген. Ротордың берілген координат жүйесіндегі орынын Эйлер - Крылов бұрыштары арқылы анықтаймыз (1а-сурет) [1,2].

Базалық инерциалды координат жүйесін $O\xi\eta\zeta$, сыртқы рамкамен байланысқан координаталар жүйесін $Ox_n y_n z_n$, ішкі рамкамен байланысқан координаталар жүйесін $Ox_p y_p z_p$, ротормен байланысқан координаталар жүйесін $Ox_p y_p z_p$ деп белгілейміз.

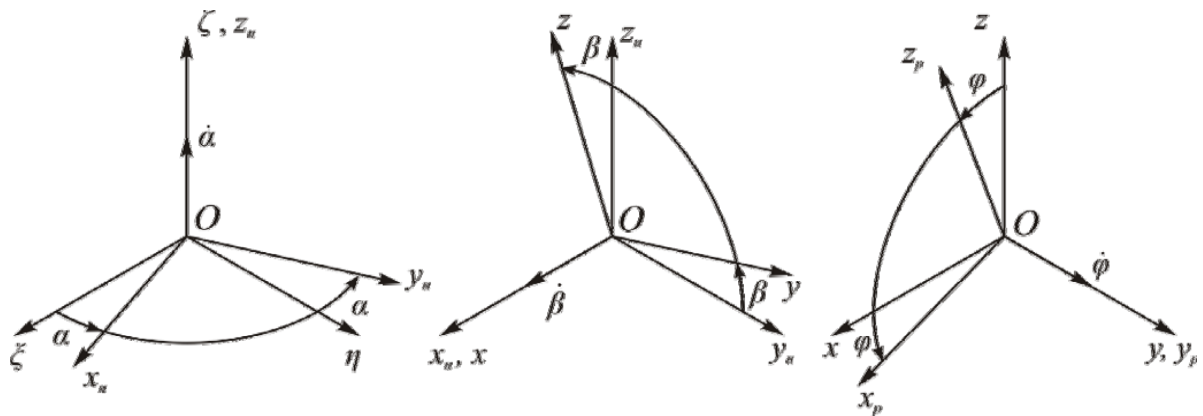


1-сурет. Эйлер–Крылов бұрыштары

Гироскоп роторының орыны $Ox_p y_p z_p$ және $O\xi\eta\zeta$ остерінің өзара орналасуы арқылы, яғни α, β және φ бұрыштары анықталады.

Ротормен байланыстырылған координата жүйесін бастапқы $O\xi\eta\zeta$ жүйесінен беріліген жердегі орнын анықтайтын $Ox_p y_p z_p$ жүйесіне сыртқы рамка осіне қатысты α бұрышына, ішкі рамка осіне қатысты β бұрышына, негізгі оське қатысты φ бұрышына айналу арқылы үш бұрылыс бойынша жүзеге асырылады (1б-сурет).

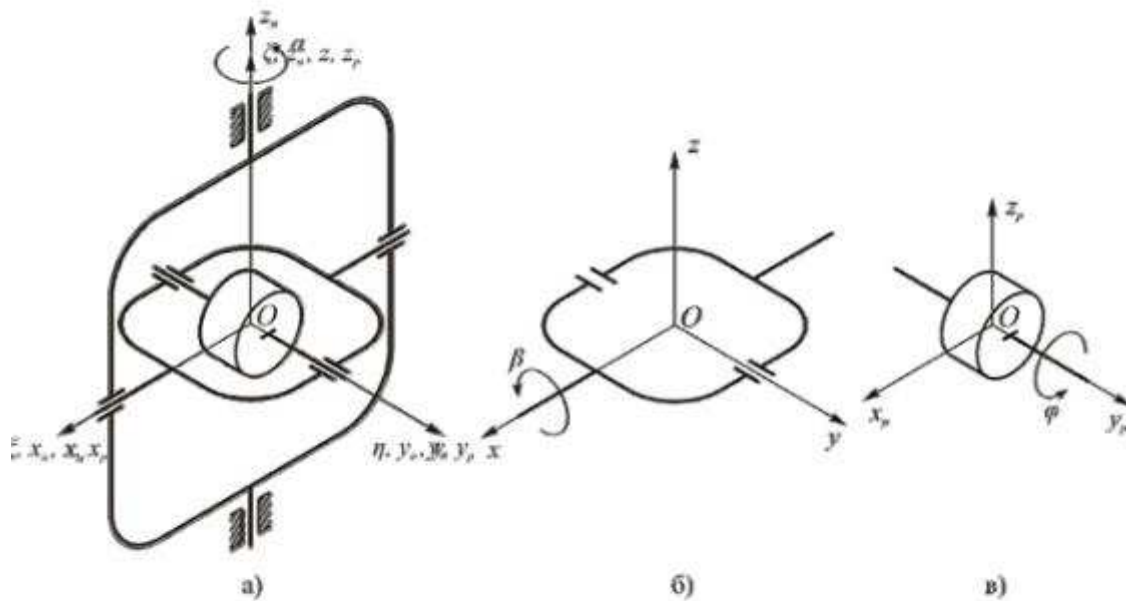
Сыртқы, ішкі рамкалардың және ротордың сағат тіліне қарсы айналысын білдіретін α , β және φ бұрыштарын оң деп санаймыз.



2-сурет. Бұрылу реті

2-суретте сыртқы рамканың базалық координат жүйесіне қатысты α , ішкі рамканың ротормен бірге β және ротордың φ Эйлер –Крылов бұрыштарына бұрылулары көрсетілген.

Кардандық іліністегі астатикалық үш еркіндік дәрежесі бар гироскоптың кинетикалық энергиясын анықтаймыз (3-сурет) [3-5]. Гироскоптың құрамына кіретін денелер мен оларды байланыстыратын координаталар жүйесі, айналу бұрыштары да осы суретте көрсетілген.

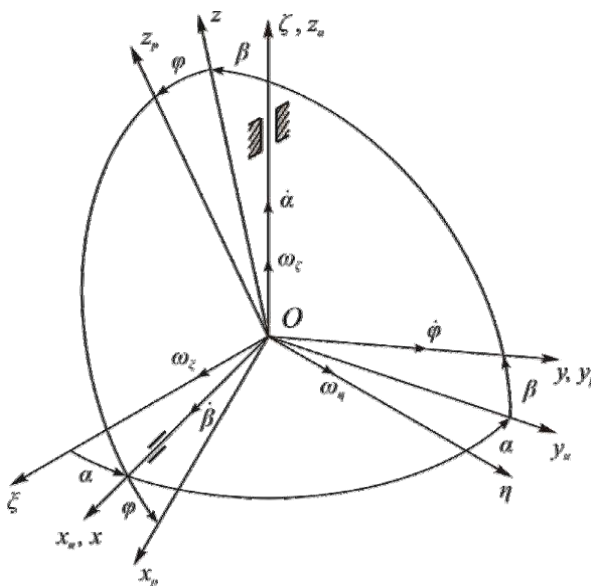


3 сурет. Гироскоп құрамына кіретін денелер және айналу бұрыштары

Базалық $O\xi\eta\zeta$ координаталық жүйесіндегі бұрыштық жылдамдықтардың проекциясын ω_ξ , ω_η , ω_ζ деп белгілейміз.

Абсолюттік бұрыштық жылдамдықтардың проекцияларын табу үшін сыртқы, ішкі рамкалар мен гироскоп роторына байланысты координаталар жүйелерінің өзара бұрылу тәртібін пайдаланамыз (4-сурет).

4-сурет. Бұрыштық жылдамдық проекцияларын анықтау сызбасы



Сонда сыртқы рамкамен байланысқан осьтердегі абсолюттік бұрыштық жылдамдық проекциялары

$$\begin{aligned} \omega_{x_H} &= \omega_\xi \cos \alpha + \omega_\eta \sin \alpha \\ \omega_{y_H} &= \omega_\eta \cos \alpha + \omega_\xi \sin \alpha \\ \omega_{z_H} &= \dot{\alpha} + \omega_\xi \end{aligned} \quad (1)$$

формулары бойынша анықталады.

Сонымен қатар ішкі рамка осьтерімен байланысқан абсолюттік бұрыштық жылдамдық проекциялары

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\beta} + \omega_{x_H} \\ \omega_y &= \omega_{y_H} \cos \beta + \omega_{z_H} \sin \beta \\ \omega_z &= \omega_{z_H} \cos \beta - \omega_{y_H} \sin \beta \end{aligned} \quad (2)$$

формуларымен өрнектеледі.

Ал гироскоп роторының бұрыштық жылдамдығының проекциялары:

$$\begin{aligned} \omega_{x_p} &= \omega_x \cos \varphi - \omega_z \sin \varphi \\ \omega_{y_p} &= \dot{\varphi} + \omega_y \\ \omega_{z_p} &= \omega_z \cos \varphi + \omega_x \sin \varphi \end{aligned} \quad (3)$$

өрнегімен сипатталады.

Математикалық түрлендірулерді қолданып,

$$\begin{aligned} \omega_{x_p}^2 + \omega_{z_p}^2 &= (\omega_x \cos \varphi - \omega_z \sin \varphi)^2 + (\omega_z \cos \varphi + \omega_x \sin \varphi)^2 = \omega_x^2 \cos^2 \varphi + \omega_z^2 \sin^2 \varphi - \\ &- 2\omega_x \omega_z \cos \varphi \sin \varphi + \omega_x^2 \sin^2 \varphi + \omega_z^2 \cos^2 \varphi + 2\omega_x \omega_z \cos \varphi \sin \varphi = \omega_x^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + \\ &+ \omega_z^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = 0 \end{aligned}$$

шығарамыз.

Сонда

$$\omega_{x_p}^2 + \omega_{z_p}^2 = \omega_x^2 + \omega_z^2 \quad (4).$$

Гироскоптың кинетикалық энергиясы сыртқы, ішкі рамкалардың және ротордың кинетикалық энергияларының қосындысына тең [3]:

$$T = T_H + T_\theta + T_p. \quad (5)$$

Осыдан сыртқы рамканың кинетикалық энергиясы:

$$T_H = \frac{1}{2} (J_{x_H} \omega_{x_H}^2 + J_{y_H} \omega_{y_H}^2 + J_{z_H} \omega_{z_H}^2) \quad (6)$$

формуласы арқылы табылады, мұндағы J_{x_H} , J_{y_H} , J_{z_H} - сыртқы рамканың инерция моментінің, ал ω_{x_H} , ω_{y_H} , ω_{z_H} - сыртқы рамканың абсолют бұрыштық жылдамдығының сәйкес осьтерге проекциялары.

Ішкі рамканың кинетикалық энергиясы:

$$T_\theta = \frac{1}{2} (J_{\theta_x} \omega_x^2 + J_{\theta_y} \omega_y^2 + J_{\theta_z} \omega_z^2) \quad (7)$$

мұндағы ω_x , ω_y , ω_z - ішкі рамканың абсолют бұрыштық жылдамдығының $Oxyz$ координата жүйесінің осьтеріне проекциялары.

Гироскоп роторының кинетикалық энергиясы:

$$T_p = \frac{1}{2} (J_9 \omega_{x_p}^2 + J_0 \omega_{y_p}^2 + J_9 \omega_{z_p}^2) \quad (8)$$

мұндағы ω_{x_p} , ω_{y_p} , ω_{z_p} - ротордың абсолют бұрыштық жылдамдығының $Ox_p y_p z_p$ координат жүйесінің осьтеріне проекциялары.

Сонда

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} J_{x_H} \omega^2_{x_H} + \frac{1}{2} J_{y_H} \omega^2_{y_H} + \frac{1}{2} J_{z_H} \omega^2_{z_H} + \frac{1}{2} J_{\text{ax}} \omega^2_x + \frac{1}{2} J_{\text{ay}} \omega^2_y + \frac{1}{2} J_{\text{az}} \omega^2_z + \frac{1}{2} J_{\text{a}_p} \omega^2_{x_p} + \\
&+ \frac{1}{2} J_0 \omega^2_{y_p} + \frac{1}{2} J_{\text{a}_p} \omega^2_{z_p} = \frac{1}{2} J_{x_H} \omega^2_{x_H} + \frac{1}{2} J_{y_H} \omega^2_{y_H} + \frac{1}{2} J_{z_H} \omega^2_{z_H} + \frac{1}{2} J_{\text{ax}} \omega^2_x + \frac{1}{2} J_{\text{ay}} \omega^2_y + \\
&+ \frac{1}{2} J_{\text{az}} \omega^2_z + \frac{1}{2} J_{\text{a}_p} (\omega^2_{x_p} + \omega^2_{z_p}) + \frac{1}{2} J_0 \omega^2_{y_p} = \frac{1}{2} J_{x_H} \omega^2_{x_H} + \frac{1}{2} J_{y_H} \omega^2_{y_H} + \frac{1}{2} J_{z_H} \omega^2_{z_H} + \\
&+ \frac{1}{2} J_{\text{ax}} \omega^2_x + \frac{1}{2} J_{\text{ay}} \omega^2_y + \frac{1}{2} J_{\text{az}} \omega^2_z + \frac{1}{2} J_{\text{a}_p} (\omega^2_x + \omega^2_z) + \frac{1}{2} J_0 \omega^2_{y_p} = \frac{1}{2} J_{x_H} \omega^2_{x_H} + \\
&+ \frac{1}{2} J_{y_H} \omega^2_{y_H} + \frac{1}{2} J_{z_H} \omega^2_{z_H} + \frac{1}{2} (J_{\text{ax}} \omega^2_x + J_{\text{a}_p}) \omega^2_x + \frac{1}{2} J_{\text{ay}} \omega^2_y + \frac{1}{2} (J_{\text{az}} + J_{\text{a}_p}) \omega^2_z + \frac{1}{2} J_0 \omega^2_{y_p}
\end{aligned}$$

Қортынды. Гироскоптың толық кинетикалық энергиясы сыртқы, ішкі аспаптар мен ротордың кинетикалық энергияларының қосындысынан тұрады. Демек

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} J_{x_H} \omega^2_{x_H} + \frac{1}{2} J_{y_H} \omega^2_{y_H} + \frac{1}{2} J_{z_H} \omega^2_{z_H} + \frac{1}{2} (J_{\text{a}_p} + J_{\text{ax}}) \omega^2_x + \frac{1}{2} (J_{\text{a}_p} + J_{\text{az}}) \omega^2_z + \\
&+ \frac{1}{2} J_{\text{ay}} \omega^2_y + \frac{1}{2} J_0 \omega^2_{y_p}
\end{aligned} \tag{9}$$

Мұндағы жалпыланған жылдамдықтар Эйлер-Крылов бұрыштарының және олардың бірінші туындыларының функциялары болады.

Анықталған гироскоптың кинетикалық энергиясы оның қозғалысын Лагранж теңдеулері арқылы құрған кезде қажет болады.

Қолданылған әдебиет тізімі

1. Лунц Я.Л. Введение в теорию гироскопов
2. Дүзелбаев С. Т. Инженерлік механика -1
3. Жолдасбеков Ө. А., Сағитов М. Н., Мұстахишев Қ. Теориялық механика
4. Николай Е. Л. Теория гироскопов
5. Меркин Д. Р. Гироскопические системы