ӘОЖ **519.52**

ЕКІ ӨЛШЕМДІ НОВИКОВ АЛГЕБРАСЫНЫҢ МЫСАЛЫ

Жубанова Кумис Куанышбаевна
kumis_095@mail.ru
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің 6М060100 – «Математика» мамандығының 2 курс магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі-Д.Қозыбаев

F өріс берілсін. F өрісіндегі A алгебрасы кез келген $x, y, z \in A$ үшін

$$x \cdot (y \cdot z) - (x \cdot y) \cdot z = y \cdot (x \cdot z) - (y \cdot x) \cdot z \ (1)$$

$$(x \cdot y) \cdot z = (x \cdot z) \cdot y \quad (2)$$

шарттарын қанағаттандырса Новиков алгебрасы деп аталады[1].

A алгебрасы Новиков алгебрасы болсын және A алгебрасында жақшаны былай анықтайық

$$[x, y] = x \cdot y - y \cdot x$$

Онда $(A, [,])$ Ли алгебрасы болады.

A алгебра болсын. $x \in A$ үшін $L_x : A \to A$ сызықты бейнелеуі $L_x(y) = x \cdot y$ арқылы анықталсын.Осылайша $R_x(y) = y \cdot x$, $ad_x = L_x - R_x$ бейнелеулерін анықтайық.Енді A (1) шартты қанағаттандырады деп ұйғарайық. Онда барлық $x, y \in A$ үшін (2) шарты орындалуы үшін $[R_x, R_y] = 0$ болуы қажетті және жеткілікті[2].

(2) шартта x -ті бекітейік. Онда

$$R_y R_z = R_z R_y \Rightarrow R_y R_z - R_z R_y = 0 \Rightarrow [R_x, R_y] = 0$$

Сонымен қатар, (1) шарттан $[L_x, L_y] = L_{[x,y]}$ екендігін аламыз.Толық есептеулер төменде көрсетілген.

(1) шартта z -ті бекітейік. Онда

$$L_y L_x - L_{xy} = L_x L_y - L_{yx}$$

$$L_x L_y - L_y L_x = L_{xy} - L_{yx}$$
$$L_x L_y - L_y L_x = L_{[x,y]}$$
$$[L_x, L_y] = L_{[x,y]}$$

$R_x = L_x - ad_x, [R_x, R_y] = 0$ қолдана отырып келесі тұжырымдаманы аламыз.

Лемма1. $L_{[x,y]} + ad_{[x,y]} - [L_x, ad_y] - [ad_x, L_y] = 0$. (3)

Дәлелдеуі:

$$0 = [R_x, R_y] = [L_x - ad_x, L_y - ad_y] = (L_x - ad_x)(L_y - ad_y) - (L_y - ad_y)(L_x - ad_x) =$$
$$- L_x L_y - L_x ad_y - ad_x L_y + ad_x ad_y - L_y L_x + L_y ad_x + ad_y L_x - ad_y ad_x =$$
$$= L_x L_y - L_y L_x + ad_x ad_y - ad_y ad_x - L_x ad_y + ad_y L_x - ad_x L_y + L_y ad_x =$$
$$= L_{[x,y]} + ad_{[x,y]} - [L_x, ad_y] - [ad_x, L_y]$$

Егер Лемма1-дегі $x = e_i, y = e_j$ деп белгілесек және ade_k бейнелеуі g -дағы Ли көбейткіші ретінде берілсе, онда біз (3) теңдеуге эквивалентті сызықтық теңдеулер жүйесін аламыз.

Мысал. e_1, e_2 базисі бар $F = C$ -да екі өлшемді g Ли алгебрасын қарастырайық және Ли жақшасы $[e_1, e_2] = e_1$ арқылы берілсін. $L_i = L_{e_i}$ және

$$L_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

деп алайық.

Лемма2. Лемма 1-дің шартында $x = e_1, y = e_2$ деп алсақ,онда (3) тепе-теңдік $a_{21} = 0, a_{11} = b_{21}, a_{22} = -b_{21}, b_{22} = b_{11} + 1$ теңдеулеріне эквивалентті. Сонымен қатар, $L_{e_1}(e_2) - L_{e_2}(e_1) = [e_1, e_2]$ $a_{22} = b_{21}, a_{12} = b_{11} + 1$ тең.

Дәлелдеуі:

$$L_1 L_2 - L_2 L_1 = L_1$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} - b_{11}a_{11} - b_{12}a_{21} = a_{11} \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} - b_{11}a_{12} - b_{12}a_{22} = a_{12} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} - b_{21}a_{11} - b_{22}a_{21} = a_{21} \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} - b_{21}a_{12} - b_{22}a_{22} = a_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [a_{11}, b_{11}] + a_{12}b_{21} - b_{12}a_{21} = a_{11} \\ [a_{22}, b_{22}] + a_{21}b_{12} - b_{21}a_{12} = a_{22} \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} - b_{11}a_{12} - b_{12}a_{22} = a_{12} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} - b_{21}a_{11} - b_{22}a_{21} = a_{21} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12}b_{21} - b_{12}a_{21} = a_{11} \\ a_{22} + a_{21}b_{12} - b_{21}a_{12} = a_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{12}b_{21} - b_{12}a_{21} = 0 \\ a_{21}b_{12} - b_{21}a_{12} = 0 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} a_{12}b_{21} - b_{12}a_{21} = 0 \\ a_{21}b_{12} - b_{21}a_{12} = 0 \end{cases}$$

$$a_{12}b_{21} - b_{12}a_{21} + a_{21}b_{12} - b_{21}a_{12} = 0$$

$$(a_{12}b_{21} - b_{21}a_{12}) - (b_{12}a_{21} - a_{21}b_{12}) = 0$$
$$[a_{12}, b_{21}] - [b_{12}, a_{21}] = 0$$
$$a_{12} - b_{12} = 0$$
$$a_{12} = b_{12}$$
$$(a_{12}b_{21} - b_{21}a_{12}) + (a_{21}b_{12} - b_{12}a_{21}) = 0$$
$$[a_{12}, b_{21}] + [a_{21}, b_{12}] = 0$$
$$a_{12} + a_{21} = 0$$
$$a_{12} = -a_{21}$$
$$[a_{21}, b_{12}] - [b_{12}, a_{12}] = 0$$
$$a_{21} - b_{21} = 0 \qquad \Rightarrow a_{21} = b_{21} = -a_{12} = -b_{12}$$
$$a_{21} = b_{21}$$
$$-\begin{cases} a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} - b_{11}a_{12} - b_{12}a_{22} = a_{12} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} - b_{21}a_{11} - b_{22}a_{21} = a_{21} \end{cases}$$
$$a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} - b_{11}a_{12} - b_{12}a_{22} - a_{21}b_{11} - a_{22}b_{21} + b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} = a_{12} - a_{21}$$
$$a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} - b_{11}a_{12} - b_{12}a_{22} + a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12} - b_{12}a_{11} - b_{22}a_{12} = a_{12} + a_{12}$$
$$\left(a_{11}b_{12} - b_{12}a_{11}\right) + \left(a_{12}b_{22} - b_{22}a_{12}\right) + \left(a_{12}b_{11} - b_{11}a_{12}\right) + \left(a_{22}b_{12} - b_{12}a_{22}\right) = 2a_{12}$$
$$[a_{11}, b_{12}] + [a_{12}, b_{22}] + [a_{12}, b_{11}] + [a_{22}, b_{12}] = 2a_{12}$$
$$a_{11} + a_{12} + a_{12} + a_{22} = 2a_{12}$$
$$a_{11} = -a_{22}$$
$$-\left(b_{12}a_{11} - a_{11}b_{12}\right) + \left(a_{12}b_{22} - b_{22}a_{12}\right) + \left(a_{12}b_{11} - b_{11}a_{12}\right) - \left(b_{12}a_{22} - a_{22}b_{12}\right) = 2a_{12}$$
$$-b_{12} + a_{12} + a_{12} - b_{12} = 2a_{12}$$
$$-2b_{12} = 0$$
$$2b_{21} = 0$$
$$b_{21} = 0 \Rightarrow a_{21} = 0$$
$$-\left(b_{12}a_{11} - a_{11}b_{12}\right) + \left(a_{12}b_{22} - b_{22}a_{12}\right) + \left(a_{12}b_{11} - b_{11}a_{12}\right) + \left(a_{22}b_{12} - b_{12}a_{22}\right) = 2a_{12}$$
$$-b_{12} + a_{12} + a_{12} + a_{22} = 2a_{12}$$
$$a_{22} = b_{12}$$
$$a_{22} = -b_{21} \Rightarrow a_{11} = -a_{22} = b_{21} \Rightarrow a_{11} = b_{21}$$

Сондықтан біз бұл сызықтық теңдеулерді былай белгілейміз:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L_2 = \begin{pmatrix} b_{22} - 1 & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} (4)$$

Бұл матрицалардың Новиков құрылымын анықтайтынын тексеру оп-оңай.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. D.Burde, K.Dekimpe, K.Vercammen, Novikov algebras and Novikov structures on Lie algebras // Linear Algebra Appl. 2008.-№ 429 (1).- P.31-41.
2. D.Burde and W.Graaf, Classification of Novikov algebras // Appl.Algebra Engrg.Comm.Comput, 2013.-№ 24.- P.1-15.