

ЖЫЛЖЫМАЛЫ ҚҰРАМ ЖҰМЫСЫНЫҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛІ

Тогисова Акерке Бакитбековна

togissovakerke@gmail.com

Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ, Механика-математика факультеті, Математикалық және компьютерлік модельдеу кафедрасы, 2 курс магистранты
Ғылыми жетекшісі – Р.А.Сергибаев

Автокөлік кәсіпорнының жалпы қызметін тұтас бір жүйе есебінде қарастырайық. Осы жүйенің жұмыс істеу қызметін модельдеуге ең қолайлы математикалық аппарат Марковтың кездейсоқ процестері болып табылады [3]. Марковтың кездейсоқ процестерін пайдалана отырып, автокөліктерді кездейсоқ оқиғалардың (істен шығу) әсерінен күйден күйге ауысатын, дискретті күйлері S_0, S_1, \dots, S_n , бар қандай да бір жүйе S ретінде алайық.

Автокөліктің жұмысын жоспарлау сатысында жылжымалы құрам пайдалану (эксплуатация) процесінде болуы мүмкін және бүтін бір күндік күймен сипатталады:

S_0 - түзетілген, жұмыс істейді;

S_1 - күрделі жөндеуде тұр (КЖ);

S_2 - ТҚК-2 өтуде;

S_3 - ағымдағы жөндеуде (АЖ);

S_4 - түзетілген, ұйымдық себептер бойынша жұмыс істемейді (жүргізушісіз, шинасыз, қосалқы бөлшектерсіз);

S_5 - жұмыс істемейді, күрделі жөндеуге жіберу үшін агрегатты алып тастау;

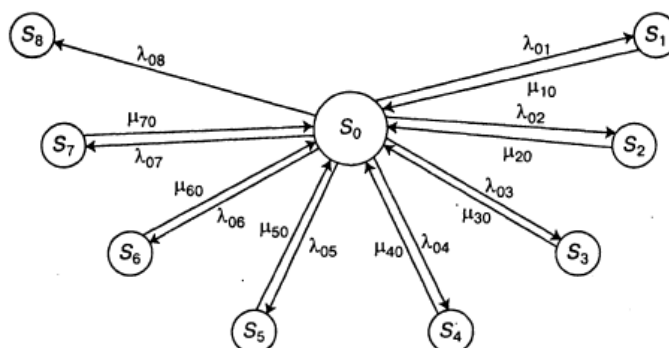
S_6 - жұмыс істемейді, агрегатты есептен шығару, жаңасына ауыстыру;

S_7 - түзетілген, жұмыс істемейді (демалыс және мереке күндері);

S_8 - есептен шығарылады.

Автокөліктің жоғарыда аталған күйлері автокөлік кәсіпорны жұмысының жылдық бағдарламасын әзірлеу кезінде жоспарланады, бұл ретте S_3, S_5, S_6 күйлері «АЖ»-де деген күйге біріктіріледі.

Дискретті күйлері бар кездейсоқ процесс ретінде автокөлікті пайдалану процесін талдау үшін күй графы деп аталатын геометриялық схеманы пайдалану ыңғайлы (1-сурет). Күй графы автокөліктің мүмкін болатын барлық күйлерін және оның күйден күйге ауысуын бейнелейді.



1 сурет. Автокөліктің күйлерінің графы

1 суретте λ_{ij} - және μ_{ji} арқылы автокөліктің S_i күйден S_j күйге өту ықтималдығының тығыздығы белгіленеді. Мысалы λ_0 - автокөліктің «жарамды, жұмыс істейді» күйінен «ағымдағы жөндеуде» күйге өту ықтималдығының тығыздығы.

Автокөлікті күйден күйге ауыстыратын оқиғаларды – оқиға ағындары (мысалы, істен шығу ағыны) деп есептеуге болады. Егер жүйені (автокөлікті) күйден күйге ауыстыратын пуассондық (стационарлық немесе стационарлық емес) болса, онда жүйеде өтетін процесс марковтық болады, ал Марковтың үздіксіз тізбегінде өту ықтималдығының тығыздығы λ_{ij} жүйені S_i күйден S_j күйге ауыстыратын оқиғалар ағынының қарқындылығын білдіреді. Мысалы λ_{03} - автокөліктің «ақаусыз» күйден «ағымдағы жөндеуде» күйге ауыстыратын автокөліктің істен шығу ағынының қарқындылығы [1].

Автокөліктің қарастырылып отырған S_j күйі автокөліктің әрбір D_j күйде болған күндердің орташа санымен сипатталады. D_j көрсеткіштерін автокөлік кәсіпорнының статистикалық есептілігінде көрініс табады. Қатынасы

$$P_j = \frac{D_j}{D_k}, \quad (1)$$

мұндағы D_k – жылдағы күнтезбелік күндер саны.

D_k – автокөліктің j -күйде болу ықтималдығы ретінде алуға болады.

Автомобиль күйінің ықтималдығы $P_0, P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_n$ дискретті күймен және үздіксіз уақытпен марков процесі кезіндегі жүріс функциясы ретінде дифференциалды теңдеулердің белгілі бір түрін (Колмогоров теңдеулері) қанағаттандырады [2].

$$\begin{cases} \frac{dP_0(L)}{dL} = -l_c \sum_{i=1}^n \lambda_{0i}(L) \cdot P_0(L) + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_{i0}(L) \cdot P_i(L) \\ \dots \\ \frac{dP_i(L)}{dL} = l_c \lambda_{0i}(L) \cdot P_0(L) - \mu_{i0}(L) \cdot P_i(L) \\ \dots \\ \frac{dP_n(L)}{dL} = l_c \lambda_{0n}(L) \cdot P_0(L), \end{cases} \quad (2)$$

мұндағы $P_i(L)$ – автокөліктің i -күйдегі болу ықтималдығы ($i = 0, \dots, n$);

$\lambda_{0i}(L)$ – автокөліктің нөлдік күйден i -күйге өту қарқындылығы

$\mu_{i0}(L)$ – автомобильдің i -ден нөлдік күйге өту қарқындылығы;

l_c – жұмыстардың істелген күндер мен жүріс километрлеріндегі арасындағы байланысты көрсететін коэффициент (орташа тәуліктік жүріс, мың км).

(2) жүйедегі теңдеулер саны автокөлік күйлерінің санына тәуелді. Автокөліктің «жарамды-жұмыс істейді» күйде болу ықтималдығы $P_0(L)$ автокөліктерді шыару коэффициенті $\alpha_g(L)$ болып табылады, ал ықтималдық қосындысы $P_0(L) + P_4(L) + P_7(L) = k_{mc}(L)$ -автомобильдің техникалық дайындығының коэффициенті.

Өту қарқындылықтар жүрістен тәуелді болғандықтан, (2) жүйесін шешу сандық интегралдау әдістерінің көмегімен жүргізіледі, мысалы, Рунге-Кутта әдісі [1].

АТК өндірістік бағдарламасын есептеу үшін белгілі бір үлгідегі j -жастағы автомобильдер тобының жұмыс көрсеткіштерін анықтау қажет (автокөліктің шығу коэффициенті және j -жас тобындағы жылдық жүрісі).

Белгілі бір модельдегі шартты автокөліктің жұмыс процесін бейнелейтін сызба 1 суреттегі схемаға ұқсас, тек айырмашылығы λ_{ij} және μ_{ji} арқылы автокөлікті S_i -күйден S_j -күйге немесе керісінше ауыстыратын оқиғалар ағынының орташа қарқындылығы белгіленген. Бұл ретте әрбір күй t уақыт кезінде, ондағы автомобильдердің орташа санымен $N_j(t)$ сипатталады. Әлбетте, кез келген t үшін барлық жағдайлардың саны зерттелетін топтың автокөліктерінің жалпы санына тең:

$$N = \sum_{j=0}^8 N_j(t).$$

Кез келген t үшін $N_j(t)$ шама кездейсоқ шаманы, ал өзгерген t үшін — кездейсоқ уақыт функциясын білдіреді.

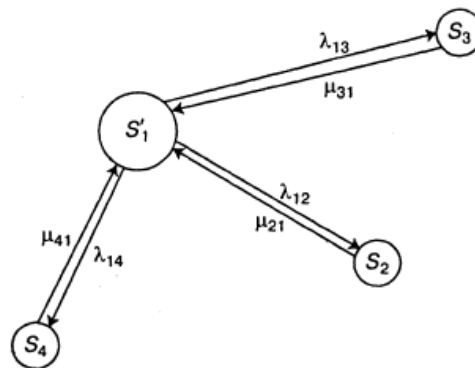
Күй бағанын (1 сурет) және тиісті өту қарқындылықтарын λ_{ij} және μ_{ji} біле отырып автокөліктердің орташа санын $N_0(t), N_1(t), N_2(t), \dots, N_8(t)$ жүріс функциясы L ретінде анықтаймыз.

Күй графына сәйкес (1 сурет.) күйлердің орташа саны үшін дифференциалдық теңдеулер жүйесі былайша жазылады [2]:

$$\begin{aligned} \frac{dN_0(L)}{dL} &= -l_c \cdot N_0(L) [\lambda_{01}(L) + \lambda_{02}(L) + \lambda_{03}(L) + \lambda_{04}(L) + \lambda_{05}(L) + \lambda_{06}(L) + \lambda_{07}(L) + \\ &+ \lambda_{80}(L)] + \mu_{10}(L) \cdot N_1(L) + \mu_{20}(L) \cdot N_2(L) + \mu_{30}(L) \cdot N_3(L) + \mu_{40}(L) \cdot N_4(L) + \mu_{50}(L) \cdot N_5(L) + \\ &+ \mu_{60}(L) \cdot N_6(L) + \mu_{70}(L) \cdot N_7(L); \\ \frac{dN_1(L)}{dL} &= l_c \cdot N_0(L) \cdot \lambda_{01}(L) - \mu_{10}(L) \cdot N_1(L); \\ \frac{dN_2(L)}{dL} &= l_c \cdot N_0(L) \cdot \lambda_{02}(L) - \mu_{20}(L) \cdot N_2(L); \\ \frac{dN_3(L)}{dL} &= l_c \cdot N_0(L) \cdot \lambda_{03}(L) - \mu_{30}(L) \cdot N_3(L); \\ \frac{dN_4(L)}{dL} &= l_c \cdot N_0(L) \cdot \lambda_{04}(L) - \mu_{40}(L) \cdot N_4(L); \\ \frac{dN_5(L)}{dL} &= l_c \cdot N_0(L) \cdot \lambda_{05}(L) - \mu_{50}(L) \cdot N_5(L); \\ \frac{dN_6(L)}{dL} &= l_c \cdot N_0(L) \cdot \lambda_{06}(L) - \mu_{60}(L) \cdot N_6(L); \\ \frac{dN_7(L)}{dL} &= l_c \cdot N_0(L) \cdot \lambda_{07}(L) - \mu_{70}(L) \cdot N_7(L); \\ \frac{dN_8(L)}{dL} &= l_c \cdot N_0(L) \cdot \lambda_{08}(L). \end{aligned} \tag{3}$$

$N_0(L)/N$ қатынасы белгілі бір модельді автокөліктерді пайдалану басталғаннан бастап L жүгіріске шығару коэффициентіне, ал $[N_0(L) + N_4(L) + N_7(L)]/N$ қатынасы - автокөліктердің техникалық дайындық коэффициентіне тең.

Жарамды күйдегі автомобильдердің орташа санын есептеу үшін S_1, S_5, S_6 күйлерді алдын ала бір күйге біріктіруге болады: «жарамды» – S_1' күйге. Сол кезде шартты автокөліктің күй графы 2 суреттегі көріністі қабылдайды.



2 сурет. Шартты автокөліктің күйлерінің графы

$$\begin{cases} \frac{dN_1'(L)}{dL} = -l_c(\lambda_{12}(l) \cdot \lambda_{13}(l) + \lambda_{14}(l)) \cdot N_1'(l) - \mu_{21}(l) \cdot N_2(l) + \mu_{31}(l) \cdot N_3(l) + \mu_{41}(l) \cdot N_4(l) \\ \frac{dN_2(l)}{dL} = -\mu_{21}(l) \cdot N_2(l) + l_c \cdot N_1'(l) \cdot \lambda_{12}(l) \\ \frac{dN_3(l)}{dL} = -\mu_{31}(l) \cdot N_3(l) + l_c \cdot N_1'(l) \cdot \lambda_{13}(l) \\ \frac{dN_4(l)}{dL} = -\mu_{41}(l) \cdot N_4(l) + l_c \cdot N_1'(l) \cdot \lambda_{14}(l) \end{cases} \quad (4)$$

Теңдеулердің сол жағын 0-ге теңеп, тұрақты режимде жұмыс істейтін автопарк күйлерінің орташа саны үшін алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{aligned} 0 &= -l_c(\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14}) \cdot N_1' - \mu_{21}N_2 + \mu_{31}N_3 + \mu_{41}N_4 \\ 0 &= -\mu_{21}(l)N_2 + l_c \lambda_{14}N_1' \\ 0 &= -\mu_{31}(l)N_3 + l_c \lambda_{13}N_1' \\ 0 &= -\mu_{41}(l)N_4 + l_c \lambda_{14}N_1'. \end{aligned} \quad (5)$$

Нормалаушы шартты ескере отырып, алгебралық теңдеулер жүйесін шешеміз:

$$N_0 = N_1 + N_2 + N_3 + N_4,$$

мұндағы N_0 - автопарктың орташа тізімдік саны, дана.

(5) жүйенің мысалында белгісіз күйлердің орта санын, N_1' қолданып анықтаймыз. Осылайша, екінші және үшінші теңдеулерден аламыз

$$N_2 = l_c \frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}} N_1'; \quad (6)$$

$$N_3 = l_c \frac{\lambda_{13}}{\mu_{31}} N_1'. \quad (7)$$

Нормалық шартқа сәйкес

$$N_4 = N_0 - N_1' - N_2 - N_3. \quad (8)$$

Онда

$$N_4 = N_0 - \left(N_1' + N_1' l_c \frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}} + N_1' l_c \frac{\lambda_{13}}{\mu_{31}} \right) = N_0 - \left(1 + l_c \frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}} + l_c \frac{\lambda_{13}}{\mu_{31}} \right) N_1'.$$

(5) бірінші теңдеуге қойып, аламыз:

$$0 = -l_c (\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14}) N_1' + l_c \lambda_{12} N_1' + l_c \lambda_{13} N_1' + \mu_{41} \left[N_0 - \left(1 + l_c \frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}} + l_c \frac{\lambda_{13}}{\mu_{31}} \right) N_1' \right] =$$

$$= -l_c \lambda_{14} N_1' + \mu_{41} N_0 - \mu_{41} \left(1 + l_c \frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}} + l_c \frac{\lambda_{13}}{\mu_{31}} \right) N_1'.$$

Алынған теңдеуді μ_{41} -ге бөліміз:

$$-l_c \frac{\lambda_{14}}{\mu_{41}} N_1' + N_0 - \left(1 + l_c \frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}} + l_c \frac{\lambda_{13}}{\mu_{31}} \right) N_1' = 0.$$

Соңғы теңдеуді келесідей жазуға болады:

$$N_0 = \left(1 + l_c \frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}} + l_c \frac{\lambda_{13}}{\mu_{31}} + \frac{\lambda_{14}}{\mu_{41}} l_c \right) N_1'.$$

Онда техникалық дайындық коэффициенті тең:

$$K_{mz} = \frac{N_1'}{N_0} = \frac{1}{1 + l_c \left(\frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}} + \frac{\lambda_{13}}{\mu_{31}} + \frac{\lambda_{14}}{\mu_{41}} \right)}, \quad (9)$$

мұндағы λ_{12} , λ_{13} , λ_{14} – автокөліктің тиісінше «техникалық қызмет көрсету», «ағымдағы жөндеу», «күрделі жөндеу» күйіне көшуінің қарқындылығы, і.ш./мың км;

μ_{21} , λ_{31} , λ_{41} – техникалық қызмет көрсетудің (ТҚК-2), ағымдағы жөндеудің (АЖ), күрделі жөндеудің (КЖ) тиісті жөндеу әсерлерінің ұзақтығының кері орташа шамаларына тең қалпына келтіру қарқындылығы.

Қатынасы

$$\frac{\lambda_{ij}}{\mu_{ji}} = \frac{\text{кун}}{\text{мын.км}}.$$

Осылайша $\frac{\lambda_{ij}}{\mu_{ji}} = d_j$ – үлестік шама: 1 мың км жүріс кезіндегі j -ші күйде (ТҚК-2, АЖ,

КЖ) болуы күндер санын сипаттайды. Сонда (9) формуласын былайша жазуға болады:

$$K_{mz} = \frac{1}{1 + l_c (d_2 + d_3 + d_4)} = \frac{\text{кун}}{1 + l_c d_{\text{ТО-Р}}}. \quad (10)$$

Әлбетте, (10) формула алгебралық теңдеулер жүйесінің шешімі болып табылатын автокөліктің тұрақты жұмыс режиміне сәйкес келетін жеке жағдайы болып табылады [2].

Осылайша, автокөлікті «күрделі жөндеу» күйіне ауыстыратын оқиғалар ағыны жүрістің едәуір интервалында өтеді. Бұл ағында қарқындылық $\lambda_{01}(L)$ (жүгіріс бірлігіндегі оқиғалардың орташа саны) жүріске тәуелді, яғни ағын стационарлық емес болып табылады.

Сонымен, шартты автомобильді «агрегатты күрделі жөндеу» және «агрегатты есептен шығару» күйіне ауыстыратын істен шығу ағындарына қатысты тұжырымдар ұқсас болып келеді.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

3. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем. – М.: Финансы и статистика, 2006, 432 с.

4. Лукинский В.С., Бережная Е.В., Бережной В.И. Логистика автомобильного транспорта. — М.: Финансы и статистика, 2004, 368 с.
5. Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М. Случайные процессы. – М.: Изд-ва МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1999, 448 с.