УДК 517

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ТЕМПЕРАТУРЫ

Джанмулдаева Асель Бахитжановна
janmuldaeva1210@mail.ru

ЕНУ им Л.Н.Гумилева, докторант, математическое и компьютерное моделирование
Научный руководитель-Адамов А.А.

Интенсивное развитие науки и техники, создание новых конструкций строительных сооружений, использование качественно новых материалов, отвечающих современному уровню научно-техничного прогресса, выдвигают повышенные требования к исследованиям нестационарного поведения элементов различных строительных и иных конструкций и сооружений с учетом температуры. Огромный размах промышленного и жилищного строительство приводят к необходимости дальнейшего развития фундаментальных исследований в области современного строительства вызвали тенденции к последовательному и возможно более полному учету физико-механических свойств элементов строительных материалов и других, присущих реальным телам.

Одним из таких вопросов является дальнейшее развитие методики расчета наземных и подземных конструкций в виде прямоугольных в плане элементов с учетом температуры. Развитие теории колебания конструкций представляет большой прикладной интерес. Такими простейшими конструкциями являются плоские конструкции в виде пластин конечной толщины.

В задачах данного класса одними из важнейших являются исследование динамического поведения пластин с учетом влияния температуры.

Рассмотрим безграничную в плане пластинку толщиной 2h. Плоскость совместим в средней плоскости пластинки z=0. Ось 0Zнаправим в сторону внешней поверхности пластины.

Рассматривая задачу в трехмерной линейной постановке, уравнения движения пластинки в напряжениях запишем в виде:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$
$$\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2};$$
$$\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \qquad (1.1.1)$$

где ρ −плотность материала пластинки, u, v, w −перемещение точек, σ_{ij} −напряжения.

Предполагая материалы пластинки вязкоупругим и изотропными, зависимости σ_{ij} −от деформации ε_{ij} с учетом влияния T температуры запишем в виде:

$$\sigma_{ii}=L(\varepsilon_{ii})+2M(\varepsilon_{ii})-\alpha_0 K(T);$$
$$\sigma_{ij}=M\left(\varepsilon_{ij}\right); \qquad (i=j)(i,j=x,y,z) \qquad (1.1.2)$$

где операторы $N=L+2M; K=L+\frac{2}{3}M$

L, M −вязкоупругие операторы вида

Уравнения движения (1.1.1) при зависимостях (1.1.2) упрощаются введением потенциалов Ф и $\vec{\Psi}$ продольных и поперечных волн,по известным формулам

$$\vec{U}=grad\,\Phi+rot\,\vec{\Psi} \qquad (1.1.4)$$

при этом в силу соленоидальности векторного потенциала поперечных волн (отсутствие истоков,стоков) он должен удовлетворять условию

$$div\vec{\Psi}=0 \qquad (1.1.5)$$

являющегося замыкающим уравнением для нахождения четырех неизвестных потенциалов $\Phi, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$.
Подставляя выражения (1.1.4) в зависимости (1.1.2), затем в уравнения движения (1.1.1), получим систему разделенных интегродифференциальных уравнений

$$N(\Delta\Phi) = \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \alpha_0 K T;$$

$$M(\Delta\vec{\Psi}) = \rho \frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial t^2}. \qquad (1.1.6)$$

Где Δ −трехмерный оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

В соответствии с теорией термовязкоупругости, для температуры имеем уравнение

$$\Delta T - \frac{1}{{C_0}^2} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) K(\Delta\Phi - \alpha_0 T); \qquad (1.1.7)$$

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \eta_0 \frac{\partial}{\partial t} + \eta_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Здесь ${c_0}^2 = \frac{k}{c_p}; c^2 = \frac{k}{c_1}; \eta_0 = \frac{X}{k}; \eta_1 = \frac{c_p - c_v}{\alpha k}$,
где η_0, η_1 −коэффициенты связности;
k −коэффициент теплопроводности;
c −скорость распространения температуры;
c_1, X −параметры термоупругой среды;
c_p, c_v − теплоемкость при постоянном давлении и объеме.
Уравнение (1.1.7) принадлежит к уравнению гиперболического типа и описывает процесс распространения тепла с конечный скоростью с.
Через потенциалы Ф и $\vec{\Psi}$ перемещения, деформации и напряжения выражаются по формулам:

Перемещения

$$U = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z};$$

$$V = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_3}{\partial x};$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}; \qquad (1.1.8)$$

Деформации

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x \partial y};$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial x \partial y};$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y \partial z};$$

$$\varepsilon_{xy} = 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial x^2};$$

$$\varepsilon_{xz} = 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x \partial y};$$

$$\varepsilon_{yz} = 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y^2}; \qquad (1.1.9)$$

Колебания пластинки вызываются внешними усилиями

$$\sigma_{zz} = F^{\pm}{}_{zz}(x,y,t); \quad \sigma_{yz} = F^{\pm}{}_{yz}(x,y,t); \quad \sigma_{zz} = F^{\pm}{}_{xz}(x,y,t); \qquad (1.1.11)$$

при $z = \pm h$;
и условие для Т

$$h_0 \frac{\partial T}{\partial z} = \pm[T - F_2(x, y, t)] \qquad (1.1.12)$$

Где h_0 −константа материала.
Начальные условия нулевые,

$$u = v = w = T = 0; \qquad (1.1.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} = 0; \quad t = 0$$

Таким образом, краевая задача колебания пластинки с учетом влияния температуры, сводится к решению интегродифференциальных уравнений (1.1.6) и (1.1.7) при граничных и начальных условиях (1.1.11)-(1.1.13).

Литература

1. Амбарцумян С.А.Теeория анизотропных пластин.-М.:Наука,1967,с.267
2. Григолюк Э.И.,Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней,пластин оболочек. Механика деформируемого твердого тела. Итоги науки.-т.5.-М.:ВИНИТИ,1973-272с.
3. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.:Мир,1984,38с.