ӘОЖ 517.51

МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛ ҮШІН ЕРМАКОВ БЕЛГІСІНІҢ ЖАЛПЫ ТҮРІ

Медетханова Тоғжан Бақытжанқызы
medetxanova98@bk.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ,механико-математика факультеті, студент,
Нур-Султан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Ғ.Ақышев

Математикалық анализ курсынан меншіксіз интеграл мен сандық қатар туралы келесі теорема белгілі.

Теорема (Маклорен – Коши [1]). fфункциясы $[1, \infty)$ аралықта монотонды кемімелі функция болсын. Онда келесі

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

қатармен келесі интеграл

$$\int_{1}^{\infty} f(t)dt$$

бірдей жинақталады немесежинақталмайды.

Осы теореманың жалпы түрін 1871 жылы В.П.Ермаков дәлелдеді ([1]).

Теорема (Ермаков белгісі). $x > 1$ үшін f үзіліссіз, теріс емес монотонды кемімелі функция болсын. Онда, егер жеткілікті үлкен x үшін келесі теңсіздік орындалса,

$$\frac{f(e^x)e^x}{f(x)} \leq q < 1,$$

онда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ қатары жинақталады. Егер $x \geq x_0$ үшін

$$\frac{f(e^x)e^x}{f(x)} \geq 1,$$

онда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ қатары жинақталмайды.

Осы теореманың шектік түрін И.В. Терещенко [3] дәлелдеді. Соңғы жылдары монотонды кемімелі функциялар класының бірнеше жалпы түрлері анықталды [2].

Ермаков белгісінің жалпы түрі [2] мақалада дәлелденген.

Анықтама([2]). Айталық f функциясы $[1,\infty)$ анықталсын. Егер $\exists C > 0, \forall t \in [x, 2x], x \geq 1$ келесі теңсіздік $f(t) \leq C * f(x)$орындалса, f әлсіз монотонды функция деп аталады. Ондай функциялар жиынын WM символымен белгілейді.

Егер MF монотонды кемімелі функциялар жиыны болса, $MF \subset WM.$

Осы анықтамаға байланысты[2] мақалада келесі теорема дәлелденген.

Теорема 1. Айталық $f \in$ WM және $\varphi(t)$ монотонды өспелі оң функция және оның туындысы үзіліссіз болсын, $\varphi(t) > t \geq 1$. Егер

$$\frac{f(\varphi(t))\varphi'(t)}{f(t)} \leq q < 1$$

болса, онда келесі интеграл

$$\int_1^{\infty} f(t)dt$$

жинақты болады.

Егер $\frac{f(\varphi(t))\varphi'(t)}{f(t)} > 1$ болса, онда келесі интеграл

$$\int_1^{\infty} f(t)dt$$

жинақталмайды.

Ескерту. Егер $\varphi(t) = e^t$,онда 1-теоремадан Ермаковтеоремасы шығады.

1-теореманың шектік жағдайы [4] мақалада дәлелденген.

Біздің мақсатымыз [4] мақаладағы теореманың жалпы жағдайын дәлелдеу.

Функцияның дербес шектерінің ең үлкені берілген f функциясының жоғарғы шегі деп аталады. Белгілеуі $\overline{\lim_{x\to+\infty}} f(x)$. Функцияның дербес шектерінің ең кішісі берілген f функциясының төменгі шегі деп аталады. Белгілеуі $\underline{\lim_{x\to+\infty}}$f(x)

Теорема 2(Меншіксіз интеграл үшін Ермаков белгісінің жалпы түрі)

Айталық f ∈WM және $\varphi(t)$ монотонды өспелі оң функция және туындысы үзіліссіз болсын,$\varphi(t) > t \geq 1$. Егер

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{f(\varphi(t))\varphi'(t)}{f(t)} = q < 1$$

болса, онда меншіксіз интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

жинақталады. Егер

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(\varphi(t))\varphi'(t)}{f(t)}=q>1$$

болса, онда меншіксіз интеграл

$$\int_1^\infty f(x)dx$$

жинақталмайды.

Д ә л е л д е у і: Жоғарғы шектің анықтамасы бойынша $\exists\{t_n\}$, $\lim_{n\to+\infty} t_n=+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(\varphi(t_n))\varphi\prime(t_n)}{f(t_n)}=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{f(\varphi(t))\varphi\prime(t)}{f(t)}=q<1.$$

Сандық тізбектің шегінің анықтамасы бойынша

$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon\in N, \forall n>n_\varepsilon: \left|\frac{f(\varphi(t_n))\varphi\prime(t_n)}{f(t_n)}-q\right|<\varepsilon$ яғни

$$q-\varepsilon<\frac{f(\varphi(t_n))\varphi'(t_n)}{f(t_n)}<q+\varepsilon, \exists\varepsilon_0>0: q+\varepsilon_0<1$$

$$\int_{\varphi(t_{n_0})}^{\varphi(t_n)} f(x)dx=[\text{Айнымалыны алмастырамыз } x=\varphi(u). \text{Онда}]=$$

$$\int_{t_{n_0}}^{t_n} f(\varphi(u))\varphi'(u)du<(q+\varepsilon_0)\int_{t_{n_0}}^{t_n} f(u)du.$$

Сондықтан

$$\left(1-(q+\varepsilon_0)\right)\int_{\varphi(t_{n_0})}^{\varphi(t_n)} f(x)dx\le\ (q+\varepsilon_0)\left[\int_{t_{n_0}}^{t_n} f(u)du-\int_{\varphi(t_{n_0})}^{\varphi(t_n)} f(x)dx\right]$$

$$=(q+\varepsilon_0)\left[\int_{t_{n_0}}^{t_n} f(u)du-\int_{\varphi(t_{n_0})}^{t_n} f(x)dx+\int_{\varphi(t_{n_0})}^{t_n} f(x)dx-\int_{\varphi(t_{n_0})}^{\varphi(t_n)} f(x)dx\right]$$

$$=(q+\varepsilon_0)\left[\int_{t_{n_0}}^{\varphi(t_{n_0})} f(x)dx-\int_{t_n}^{\varphi(t_n)} f(x)dx\right]\le(q+\varepsilon_0)\int_{t_{n_0}}^{\varphi(t_{n_0})} f(x)dx$$

Сонымен

$$\int_{\varphi(t_{n_0})}^{\varphi(t_n)} f(x)dx\le\frac{(q+\varepsilon_0)}{1-(q+\varepsilon_0)}\int_{t_{n_0}}^{\varphi(t_{n_0})} f(x)dx\ ,\forall n>n_0$$

Осы тізбектің екі жағына

$$\int_{t_{n_0}}^{\varphi(t_{n_0})} f(x)dx$$

санын қосамыз, онда

$$\int_{\varphi(t_{n_0})}^{\varphi(t_n)} f(x)dx\le\left(\frac{q+\varepsilon_0}{1-(q+\varepsilon_0)}+1\right)\int_{t_{n_0}}^{\varphi(t_{n_0})} f(x)dx\ ,\forall n>n_0$$

Теореманың шарты бойынша $\varphi(t)>t$. Сондықтан

$$\int_{\varphi(t_{n_0})}^{\varphi(t_n)} f(x)dx \leq \frac{1}{1-(q+\varepsilon_0)} \int_{t_{n_0}}^{\varphi(t_{n_0})} f(x)dx \equiv \mathrm{C}, \forall n > n_0$$

Сонымен өспелісандық тізбек $\{\int_{t_{n_0}}^{\varphi(t_n)} f(x)dx\}_{n=n_0}^{\infty}$ жоғарыдан шенелген, яғни ол тізбек жинақталады. Сондықтан анықтама бойынша меншіксіз интеграл жинақталады.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. –М.: Наука – 1984.
2. Liflyand E. , Tikhonov S. , Zeltser M. , Extending tests for convergence of number series//Journal math. anal. and appl.Vol. 377.-2011.-P. 194-206.
3. Терещенко И. В. Признаки сгущения III. Общий показательный признак сгущения. Доказательство, основанное на интегральном признаке сходимости Маклорена – Коши // Науч. труд. КубГТУ, №5.-2014.-С.372-387.
4. Куттымуратова Ф.С. Меншіксіз интегралдың жинақталу белгілерінің кейбір жалпы түрлері // «Ғылым және білім – 2018» XIII Халықаралық ғылыми конференциясы. Астана, Астана – 2018.