УДК 517

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ НОРМИРОВКЕ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА

Хайркулова Алтынай Айтбековна
aitbekovna3@mail.ru
Докторант кафедры фундаментальной математики
ЕНУ им.Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель - Н.А. Бокаев

В данной работе приводится утверждение об эквивалентности ассоциированной нормы в весовом пространстве Орлича.

Пусть Φ есть $\mathrm{N}-$функция, т.е. $\Phi \in C[0,\infty)$,

$$\Phi(s) = \int_0^s \rho(\sigma) d\sigma,\ s \in R_+ ,$$

где $\rho -$ возрастающая непрерывная справа функция $\rho(0)=0, \rho(+\infty)=\infty.$
Пусть $\Psi -$ дополнительная функция

$$\Psi(t)=\int_0^t q(\tau)d(\tau),\ t\in R_+,\ q(\tau)=\sup\{\sigma:\rho(\sigma)\le\tau\}.$$

Известно [1], что

$$\Psi(t)=\sup_{s\ge 0}[st-\Phi(s)],\ st\le\Phi(s)+\Psi(t),\ s,t\in R_+.$$

Обозначение $A\cong B$ означает, что существует $c\in[1,\infty)$ такое, что $c^{-1}\le\frac{A}{B}\le c.$

Пусть Θ класс функции $\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ со следующим условиями: $\Phi(0)=0;$ $\Phi -$ неубывающая функция и непрерывная слева на $R_+, \Phi(+\infty)=\infty$ и Φ не тождественна нулю.Через $M=M(R_+)$ обозначим множество измеримых функций на R_+, а через $M^+=M^+(R_+)$ множество неотрицательных измеримых функций на R_+. Пусть $\upsilon\in M^+$. Для $\lambda>0$, $f\in M$ определим функционал:

$$J_\lambda(f):=\int_0^\infty\Phi\left(\lambda^{-1}|f(x)|\right)\upsilon(x)dx,$$

для $f\in M$ определим функционал Люксембурга

$$\|f\|_{\Lambda_{\Phi,\upsilon}}=\inf\{\lambda>0:J_\lambda(f)\le 1\}.$$

Весовое пространство Орлича $\Lambda_{\Phi,\upsilon}$ определяется как множества функций $f\in M$, для которых $\|f\|_{\Lambda_{\Phi,\upsilon}}<\infty.$
Положим

$$V(t)=\int_0^t\upsilon(\tau)d\tau \quad \text{для всех } t\in R_+,\ V(+\infty)=\infty,$$

$$\rho_a(g;t)=(V(t))^{-1}\int_{\delta_a(t)}^t|g(\tau)|d\tau,\ \text{где } \delta_a(t)=V^{-1}(aV(t)),\ t\in R_+,\ a\in(0,1).$$

Через Ω обозначим конус убывающих неотрицательных функции из пространства $\Lambda_{\Phi,\upsilon}$:

$$\Omega=\left\{f\in\Lambda_{\Phi,\upsilon}:0\le f\downarrow\right\}.$$

Введем ассоцированную норму :

$$\|g\|'_{\Lambda_{\Phi,\upsilon}} = \sup\left\{ \int_0^\infty f(t)g(t)dt,\, f \in \Omega,\, J_1(f) \le 1 \right\},$$

где

$$J_1(f) = \int_0^\infty \Phi(f(x))\upsilon(x)dx\,.$$

Процесс дискретизации пространства Орлича определяется следующим образом.Пусть

$$\Phi \in \Theta\,;\ \beta = \{\beta_m\},\ \beta_m \in R_+\,,\ \ m \in Z = \{0,\pm 1,\pm 2,...\}.$$

Обозначим

$$l_{\Phi,\beta} = \left\{\alpha = \{\alpha_m\}, \alpha_m \in R : \|\alpha\|_{l_{\Phi,\beta}} < \infty\right\},$$

где

$$\|\alpha\|_{l_{\Phi,\beta}} := \inf\{\lambda > 0 : j_\lambda(\alpha) \le 1\},\ j_\lambda(\alpha) = \sum_m \Phi\left(\lambda^{-1}|\alpha_m|\right)\beta_m.$$

Для фиксированного числа $b > 1$ введем последовательность $\{\mu_m\}$ по формулам

$$\mu_m = V^{-1}\left(b^m\right) \Leftrightarrow V(\mu_m) = b^m, m \in \mathrm{Z}$$

где V^{-1} – обратная функция к непрерывной возврастающей функции V . Тогда выполнены условия $\mu_m < \mu_{m+1}; R_+ = \bigcup_m \Delta_m; \Delta_m = [\mu_m, \mu_{m+1})$, поскольку

$$0 < \mu_m \uparrow,\ \lim_{m\to-\infty} \mu_m = 0,\ \lim_{m\to+\infty} \mu_m = \infty.$$

Введем весовую функцию $\upsilon \in M$, $\upsilon > 0$, удовлетворяющую условию

$$\int_{\Delta_m} \upsilon dt = \beta_m.$$

В соответствии с этими условиями получим

$$\beta_m = \int_{\Delta_m} \upsilon dt = V(\mu_{m+1}) - V(\mu_m) = b^m(b-1), m \in \mathrm{Z}.$$

Для дискретных пространств Орлича хорошо известенследующий результат [2]:
Утверждение: Пусть Φ, Ψ являются дополнительными $\mathrm{N}-$функциями и пусть выполнены условия $V(t) = \int_0^t \upsilon(\tau)d\tau$ для всех $t \in R_+$, $V(+\infty) = \infty$ и реализована процедура дискретизации. Тогда для ассоциированной нормы весового простаранства Орлича $\|g\|'$ имеет место следующая эквивалентность:

$$\|g\|'_{\Lambda_{\Phi,\upsilon}} \cong \|\{\rho_m\}\|_{\Psi,\beta};\ \beta = \{\beta_m\}, \quad \text{где } \rho_m = \beta_m^{-1} \int_{\Delta_m} |g| dt.$$

В следующей теореме представлена интегральная форма приведенного утверждения.

Теорема: Пусть Φ, Ψ являются дополнительными $\mathrm{N}-$функциями и пусть выполнены условия $V(t) = \int_0^t \upsilon(\tau) d\tau$ для всех $t \in R_+$, $V(+\infty) = \infty$. Тогда ассоциированная норма $\|g\|'_{\Lambda_{\Phi,\upsilon}}$ эквивалентна норме $\left\|\rho_{\frac{1}{2}}(g)\right\|_{\Psi,\upsilon}$ т.е.

$$\|g\|'_{\Lambda_{\Phi,\upsilon}} \cong \left\|\rho_{\frac{1}{2}}(g)\right\|_{\Psi,\upsilon}.$$

Замечание. Предположим дополнительно, что в теореме функция Φ удовлетворяет $\Delta_2 -$ условию, т.е.

$$\text{существеут } C \in (1,\infty) : \Phi(2t) \le C\Phi(t) \text{ для всех } t \in R_+.$$

Тогда

$$\|g\|' \cong \left\| V(t)^{-1} \int_0^t |g(\tau) d\tau| \right\|_{\Psi,\upsilon}$$

Список использованных источников

1. Bennett C., Sharpley R. Interpolation of operators. -B.: Academic Press, 1988, P. 469.
2. M.L. Goldman Order Sharp Estimates for Monotone Operators on Orlicz - Lorentz Classes // Springer Nature Singapore Pte Ltd. 2017, V.206. -P.37-837