ӘОЖ 517.51

ОҢ МҮШЕЛІ САНДЫҚ ҚАТАРДЫҢ ЖИНАҚТАЛУЫ ТУРАЛЫ

Басаров Сержан Жандосұлы
edu1998@list.ru
Л. Н. Гумилев атындағы ЕҰУ,механика-математикалық факультет, студент,
Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі—Ғ. Ақышев

Мақалада сандық қатардың жинақтылығы жайлыВ. П. Ермаков белгісінің [1] жалпы түрі көрсетілді. Осы теореманың дискреттік жағдайын 1910 жылы француз математигі Е. Фабри [1] дәлелдеді.

Теорема 1(Е. Фабри)**.** Оң мүшелі сандық қатар берілсін

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad (1)$$

және оның мүшелері монотонды кемімелі болсын

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$$

$\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ −келесі шарттарды қанағаттандыратындайнатурал сандардың өспелі тізбегі

$$n_0 = 1 < n_1 < n_2 < n_3 \ldots < n_k < \ldots, \qquad (2)$$

$n_k > k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$ (3)
Онда:
1)егер $k_0 \geq 1$ саны үшін келесі теңсіздік орындалса,

$$\frac{(n_{k+1}-n_k)a_{n_k}}{a_k} \leq q < 1,\ k \geq k_0, (4)$$

онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақты.
2)егер $k_0 \geq 1$ саны үшін келесі теңсіздік орындалса,

$$\frac{(n_k-n_{k-1})a_{n_k}}{a_k} \geq 1,\ k \geq k_0, (5)$$

онда$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақсыз.
1-теорема монотонды кемімелі тізбектер үшін дәлелденген. Соңғы жылдары монотонды кемімелі тізбектер класының бірнеше жалпы түрлері анықталды [2].
 Алдымен келесі анықтамаларды еске түсірейік:
Анықтама 1: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$сандық тізбек берілсін. Онда келесі символ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
сандық қатар деп аталады.
$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ дербес қосындысы деп аталады.
Егер $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$тізбегі жинақты болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$сандық қатар жинақты. Кері жағдайда жинақсыз.
Анықтама 2: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$сандық қатар берілсін. Егер қатардың әр мүшесі оң болса, яғни

$$a_n \geq 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

Онда қатар оң мүшелі сандық қатар деп аталады.
Анықтама 3: ([2])$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$оң сандар тізбегі әлсіз монотонды тізбек деп аталады, егер келесі теңсіздік орындалса,

$$\exists c > 0, \forall k = n, n+1, \ldots, 2n : a_k \leq c a_n. \quad (6)$$

Әлсіз монотонды кемімелі тізбектер жиыны WMS символымен бегіленеді.[2]-мақалада дәлелденгендей MS$\subset WMS$ (MS-монотонды кемімелі тізбектер жиыны).
Енді Фабри белгісінің жалпы жағдайын дәлелдейік.
Теорема 2. Оң сандық қатар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ берілсін
және оның мүшелері $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in WMS$.
$\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ – (2) мен (3) шарттарды қанағаттандыратындай өспелі натурал санды тізбек.
Онда:
егер $k_0 \geq 1$ саны үшін осы (4)теңсіздік орындалса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$қатары жинақты болады.
Дәлелдеуі: $\sum_{m=n_{k_0}}^{n_{k+1}-1} a_m$қосындысын алайық.

$$\sum_{m=n_{k_0}}^{n_{k+1}-1} a_m = \left(a_{n_{k_0}} + \cdots + a_{n_{k_0+1}-1}\right) + \left(a_{n_{k_0+1}} + \cdots + a_{n_{k_0+2}-1}\right) + \cdots + \left(a_{n_{k-1}} + \cdots + a_{n_k-1}\right) + \left(a_{n_k} + \cdots + a_{n_{k+1}-1}\right) = \sum_{m=k_0}^{k} \left(a_{n_m} + \cdots + a_{n_{m+1}-1}\right)$$
(7)

$a_{n_m} + \cdots + a_{n_{m+1}-1}$, m=$k_0, k_0+1, \ldots, k$ қосындысын жеке қарастырайық,
Егер

$$n_{m+1} \leq 2n_m : a_{n_m} + \cdots + a_{n_{m+1}-1} \leq c(n_{m+1} - n_m)a_{n_m} \leq cqa_m \quad (8)$$

cq=$q^* < 1$біле отырып,

$$\sum_{m=k_0}^{k} (a_{n_m} + \ldots + a_{n_{m+1}-1}) \leq \sum_{m=k_0}^{k} c(n_{m+1} - n_m)a_{n_m} \leq q^* \sum_{m=k_0}^{k} a_m \quad (9)$$

$n_{k+1} > (k+1) - 1 = k$ (3) шарт бойынша, (1) сандық қатардың мүшелері оң болғандықтан:

$$\sum_{m=n_{k_0}}^{n_{k+1}-1} a_m \le q^* \sum_{m=k_0}^{k} a_m \le q^* \sum_{m=k_0}^{n_{k+1}-1} a_m$$

Сондықтан

$$\sum_{m=n_{k_0}}^{n_{k+1}-1} a_m = \sum_{m=k_0}^{n_{k+1}-1} a_m - \sum_{m=k_0}^{n_{k_0}-1} a_m \le q^* \sum_{m=k_0}^{n_{k+1}-1} a_m$$

Соңғы теңсіздіктен k санын $k>n_{k_0}$ теңсіздігі орындалатындай етіп келесі формуланы аламыз

$$\sum_{m=n_{k_0}}^{k} a_m \le \sum_{m=k_0}^{n_{k+1}-1} a_m \le \frac{1}{1-q^*} \sum_{m=k_0}^{n_{k_0}-1} a_m \tag{10}$$

Сонымен (1) оң сандық қатардың дербес қосындысы жоғарыдан шенелген, демек қатар жинақты болады.

Енді $2n_m < n_{m+1}$ жағдайын қарастырайық.(6) шарт бойынша: $a_{2n_m} \le c a_{n_m}$.

Сондықтан, егер $2n_m < n_{m+1} \le 4n_m$, $m=k_0, k_0+1, \dots, k$болса, онда

$(a_{n_m} + \dots + a_{2n_m}) + \left(a_{2n_m+1} + \dots + a_{n_{m+1}-1}\right) \le c\left(2n_m - (n_m - 1)\right)a_{n_m} + c a_{2n_m}(n_{m+1} - 1 - 2n_m) \le c a_{n_m}(n_{m+1} - n_m)$ (11)

Дәлелдеуінің жалғасы осы (11) шарт үшін толығымен (8)-ді қайталайды.

Ал енді $2^j n_m < n_{m+1} \le 2^{j+1} n_m, \forall j \in N, m=k_0, k_0+1, \dots, k$ (12)

үшін дәлелдейік

$(a_{n_m} + \dots + a_{2n_m}) + \left(a_{2n_m+1} + \dots + a_{4n_m}\right) + \left(a_{4n_m+1} + \dots + a_{8n_m}\right) + \dots + \left(a_{2^{j-1}n_m+1} + \dots + a_{2^j n_m}\right) + \left(a_{2^j n_m+1} + \dots + a_{n_{m+1}-1}\right) \le c a_{n_m}\left(2n_m - (n_m - 1)\right) + c a_{2n_m}(4n_m - 2n_m) + c a_{4n_m}(8n_m - 4n_m) + \dots + c a_{2^{j-1}n_m}\left(2^j n_m - 2^{j-1} n_m\right) + c a_{2^j n_m}(n_{m+1} - 1 - 2^j n_m)$(13)

(6)-анықтаманы бірнеше рет қолданып, мына нәтижеге ие боламыз

$a_{2n_m} \le c a_{n_m}$,

$a_{4n_m} \le c a_{2n_m} \le c a_{n_m}$,

…….

$a_{2^j n_m} \le c a_{2^{j-1}n_m} \le \dots \le c a_{4n_m} \le c a_{2n_m} \le c a_{n_m}$ (14)

(14) арқылы (13)-теңсіздіктен:

$$\begin{aligned} & c a_{n_m}\left(1 + n_m + 2n_m + 4n_m + \dots + 2^{j-1} n_m + n_{m+1} - 1 - 2^j n_m\right) \\ &= c a_{n_m}\left(n_{m+1} + n_m\left(1 + 2 + 4 + \dots + 2^{j-1}\right) - 2^j n_m\right) \\ &= c a_{n_m}\left(n_{m+1} + n_m\left(\frac{2^j - 1}{2 - 1}\right) - 2^j n_m\right) = c a_{n_m}(n_{m+1} - n_m) \end{aligned}$$

Қорытындылай келе мына теңсіздікке келеміз

$a_{n_m} + \dots + a_{n_{m+1}-1} \le c(n_{m+1} - n_m)a_{n_m}$, $m=k_0, k_0+1, \dots, k$

Әрі қарай (5) шартты және (9) формуланы пайдаланып, (10) теңсіздік, $2n_m < n_{m+1}$ жағдайында дұрыс болатынын көруге болады. Сондықтан (1) қатар жинақты болады.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Терещенко И. В. О признаке сходимости Ермакова/Научные труды КубГТУ—2016. —№2.—С. 1-16.
2. Lyfliand E. , Tikhonov S. , Zeltser M. Extending tests of convergence of number series/ Journal of Mathematical analysis and applications—2011.—Vol. 377—P. 194-206.