УДК 517.5

РЕГУЛЯРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП ПОДСТАНОВОК

Даулетбек Улдана Бакытовна
gulzhan-65@mail.ru
студент ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Нұр-Сұлтан, Казахстан
Научный руководитель – Матин Даурен Тюлютаевич

Теория представлений конечных групп рассматривает конкретные реализации абстрактных групп. А именно, теория представлений групп изучает гомоморфизмы абстрактной конечной группы в группу матриц или линейных преобразований. Важность и значение теории представлений связана, прежде всего, с тем, что теоретико-групповые вычисления легче проводить в группе матриц, чем в абстрактной группе.

Согласно теореме Кэли для любой конечной группы G порядка n существует изоморфизм φ группы G в некоторую подгруппу симметрической группы S_n. Тогда отображение

$$\mathrm{r}\colon\ x \to p(\varphi(x)),\quad x \in G,$$

где p – линейное преобразование n-мерного векторного пространства M над полем K, является изоморфизмом группы G в группу $GL(M)$ обратимых линейных преобразований пространства M. Это представление называется регулярным представлением группы G.

Пусть $G = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ - конечная группа порядка n, M - n-мерное векторное пространство с K-базисом $\{m_1, m_2, ..., m_n\}$. Для того, чтобы определить $\mathrm{r}(x)$, $x \in G$, поступаем следующим образом: для каждого i, $1 \le i \le n$, существует такое однозначно определенное число j, $1 \le j \le n$, что

$$(1) \qquad xx_i = x_j.$$

Тогда получим $\mathrm{r}(x)\ m_i = m_j$, где числа i, j связаны соотношением (1). Обозначим через R(x) матрицу преобразования r(x) в базисе $\{m_1, m_2, ..., m_n\}$. Элемент в (j,i)-ой клетке этой матрицы равен 1, а остальные элементы i-го столбца и j-ой строки матрицы R(x) равны 0. Отображение $x \to R(x)$ называется регулярным матричным представлением группы G.

Например, если G – циклическая группа порядка 5 с образующей x, т.е. $G = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$, то, применяя соотношения (1), получаем

$x\cdot 1=x$, $xx=x^2$, $xx^2=x^3$, $xx^3=x^4$, $xx^4=1$, т.е. $xx_1=x_2$, $xx_2=x_3$, $xx_3=x_4$, $xx_4=x_5$, $xx_5=x_1$. Тогда регулярное матричное представление R группы G ставит в соответствие элементу x матрицу

<u>x=x₁</u>

$xx_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=x_1$ (1;1)

$xx_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=x_2$ (2;2)

$xx_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=x_3$ (3;3)

$xx_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=x_4$ (4;4)

$xx_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=x_5$ (5;5)

$xx_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=x_6$ (6;6)

<u>x=x₂</u>

$xx_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=x_2$ (2;1)

$xx_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=x_1$ (1;2)

$xx_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=x_6$ (6;3)

$xx_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=x_5$ (5;4)

$xx_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=x_4$ (4;5)

$xx_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=x_3$ (3;6)

<u>x=x₃</u>

$xx_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=x_3$ (3;1)

$xx_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=x_5$ (5;2)

$xx_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=x_1$ (1;3)

$xx_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=x_6$ (6;4)

$xx_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=x_2$ (2;5)

$$xx_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=x_4 \qquad (4;6)$$

$\underline{x=x_4}$

$$xx_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=x_4 \quad (4;1)$$

$$xx_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=x_6 \qquad (6;2)$$

$$xx_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=x_5 \qquad (5;3)$$

$$xx_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=x_1 \qquad (1;4)$$

$$xx_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=x_3 \qquad (3;5)$$

$$xx_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=x_2 \qquad (2;6)$$

$\underline{x=x_5}$

$$xx_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=x_5 \quad (5;1)$$

$$xx_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=x_3 \qquad (3;2)$$

$$xx_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=x_4 \qquad (4;3)$$

$$xx_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=x_2 \qquad (2;4)$$

$$xx_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=x_6 \qquad (6;5)$$

$$xx_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=x_1 \qquad (1;6)$$

$\underline{x=x_6}$

$$xx_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=x_6 \quad (6;1)$$

$$xx_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=x_4 \qquad (4;2)$$

$$xx_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=x_2 \qquad (2;3)$$

$$xx_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=x_3 \qquad (3;4)$$

$$xx_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=x_1 \qquad (1;5)$$

$$xx_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=x_5 \qquad (5;6)$$

$$R(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},$$

причем $R(x^i)=\left[R(x)\right]^i$, $1\le i\le 4$.

Мы получаем регулярное представление циклической группы 5- го порядка:

$$1\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\quad x\to\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},\quad x^2\to\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$x^3\to\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix},\quad x^4\to\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Для того, чтобы задать матричное представление произвольной группы *G*, достаточно указать, какие матрицы соответствуют образующим элементам группы.

Например, группа S_3 порождается 2 элементами: $a=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ и $b=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$.

Зная определяющие соотношения в группе S_3 и найдя матрицы, соответствующие образующим элементам *a* и *b,* получим матричное представление группы S_3.

Целью настоящей работы является построение алгоритма для регулярного представления симметрических групп и составление компьютерной программы для такого алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кэртис Ч.,Райнер И.*Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр*. - М.: Мир, 1969.
2. Б.Бухбергер, Ж.Калме и др. *Символьные и алгебраические вычисления*. – М.: Мир, 1982.