УДК 517.958

СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ МАНАКОВА

Әскерқанқызы Айгерім
Aigera16_02@mail.ru
ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – Г.Н. Нугманова, к.ф.-м.н., асс. профессор

Введение

В классической оптике недавно появилось нелокальное нелинейное уравнение типа Шрёдингера, так называемое системой Манакова [1,2], а именно:

$$iq_t(x,t) + q_{xx}(x,t) + 2\sigma q(x,t)q^*(-x,t) = 0,\ \sigma = \pm 1. \quad (1)$$

В работах [3-5]показано, что уравнение (1) является полностью интегрируемым поскольку допускает пару Лакса, бесконечное число законов сохранения и решается методом обратной задачи рассеяния.

Запишем систему Манакова (1) в векторной форме:

$$iq_{j,t}(x,t) + q_{j,xx}(x,t) + 2\sum_{l=1}^{2}\sigma_l q_l(x,t)q_l^*(-x,t)q_j(x,t) = 0,\ \ j = 1,2\,;l = 1,2, \quad (2)$$

где $q_j(x,t)$является комплексной волновой оболочкой, а $q_{j,t}(x,t)$ и $q_{j,x}(x,t)$ представляют производные от функции q_j по t и x соответственно. $q_l^*(-x,t)$-нелокальное поле, а локальную систему Манакова (1) можно получить, заменив ее локальными полями $q_l^*(x,t)$.

Для удобства мы разделим наше исследование на два этапа. Сначала мы сосредоточим наше внимание на выводе солитонных решений нелокального уравнения Манакова. Во втором этапе детально исследуем динамику столкновений между солитонами.

1Билинеаризация и солитонные решения

Для построения общих солитонных решений мы используем нестандартную процедуру билинеаризации, разработанную для нелинейного уравнения Шредингера. Приведем к билинейной форме систему (2) и нелокальное уравнение Манакова вида [4]:

$$iq^*{}_{j,t}(-x,t) - q^*{}_{j,xx}(-x,t) - 2\sum_{l=1}^{2} q_l{}^*(-x,t)q_l(x,t)q^*{}_j(-x,t) = 0. \quad (3)$$

Для билинеаризации уравнений (2) и (3) (при$\sigma_l = +1, l = 1{,}2$) одновременно мы рассмотрим следующие преобразования:

$$q_t(x,t) = \frac{q^j(x,t)}{f(x,t)},\ q^*{}_t(-x,t) = \frac{q^{j*}(-x,t)}{f^*(-x,t)},\quad j = 1{,}2, \quad (4)$$

где $q^j(x,t)$, $q^{j*}(-x,t)$, $f(x,t)$ и $f^*(-x,t)$ - комплексные функции. Для получения билинейных форм для (2) и (3) введем две вспомогательные функции, связанные с их решениями. Подставляя преобразования (4) в уравнения (2) и (3), получаем следующие билинейные уравнения:

$$(iD_t + D_x^2)g^{(j)}(x,t)\cdot f(x,t) = 2g^{(j)}(x,t)\cdot s^{(1)}(-x,t), \quad (5a)$$
$$D_x^2 f(x,t)\cdot f(x,t) = 4s^{(1)}(-x,t)\cdot f(x,t), \quad (5b)$$
$$(\mathrm{iD_t} - \mathrm{D_x^2})g^{(j)*}(-x,t)\cdot f^*(-x,t) = -2g^{(j)*}(-x,t)\cdot s^{(2)}(-x,t), \quad (5c)$$
$$D_x^2 f^*(-x,t)\cdot f^*(-x,t) = 4s^{(2)}(-x,t)\cdot f^*(x,t). \quad (5b)$$

Здесь D_t иD_x^2являются стандартными билинейными операторами Хироты [6]. Вспомогательные функции определяются как

$$s^{(1)}(-x,t)\cdot f^*(-x,t) = \sum_{l=1}^{2} g^{(n)}(x,t)g^{(n)*}(-x,t), \quad (6a)$$
$$s^{(2)}(-x,t)\cdot f(x,t) = \sum_{n=1}^{2} g^{(n)}(x,t)g^{(n)*}(-x,t). \quad (6b)$$

Приведенный выше система билинейных уравнений (5) можно решить, разложив неизвестные функции $g^{(j)}(x,t)$, $g^{(j)*}(-x,t)$, $f(x,t)$, $f^*(-x,t)$, $s^{(1)}(-x,t)$и $s^{(2)}(-x,t)$ряд по формальному параметру ϵследующим образом:

$$g^{(j)} = \epsilon g_1^{(j)} + \epsilon^3 g_3^{(j)} + \cdots,\quad g^{(j)*} = \epsilon g_1^{(j)*} + \epsilon^3 g_3^{(j)*} + \cdots, \quad (7a)$$
$$f = 1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^4 f_4 + \cdots,\quad f^* = 1 + \epsilon^2 f_2{}^* + \epsilon^4 f_4{}^* + \cdots, \quad (7b)$$
$$s^{(1)} = \epsilon^2 s_2^{(1)} + \epsilon^4 s_4^{(1)} + \cdots,\quad s^{(2)} = \epsilon^2 s_2^{(2)} + \epsilon^4 s_4^{(2)} + \cdots,\quad j = 1{,}2. \quad (7c)$$

Теперь можно получить систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных из (5a) - (5d), с учетом (7a)-(7c), собрав коэффициенты с одинаковыми степенями ϵ. Подставляя соответствующие выражения обратно в (4), мы можем получить солитонные решения уравнения(2).

2 Невырожденное и вырожденное нелокальное односолитонное решение

Солитоны, в которых обе моды распространяются с одинаковой скоростью, называются вырожденными солитонами [5,6]. Чтобы исследовать вырожденные солитоны уравнения (2), начинаем наш анализ со следующей линейной системы самого низкого порядка:

$$iq^{(j)}{}_{1,t}(x,t)+q^{(j)}{}_{1,xx}(x,t)=0, \qquad iq^{(j)*}{}_{1,t}(-x,t)-q^{(j)*}{}_{1,xx}(-x,t)=0,\ \ j=1{,}2. \tag{8}$$

Ищем решения уравнения (8) в виде

$$g_1^{(j)}(x,t)=\alpha_1^{(j)}e^{\xi_1^{(j)}},\quad \bar{\xi}_1^{(j)}=i\overline{k_1^{(j)}}x-i\bar{k}_1^{(j)^2}t, \tag{9a}$$

$$g_1^{(j)*}(-x,t)=\beta_1^{(j)}e^{\xi_1^{(j)}},\quad \xi_1^{(j)}=ik_1^{(j)}x-ik_1^{(j)^2}t,\ \ j=1{,}2. \tag{9b}$$

Солитоны такого типа являются невырожденными солитонами. Например, исходя из форм, приведенных в уравнениях (9a) и (9b), мы находим, что разложение в ряд (7a) - (7c) усечено для невырожденного решения из одного солитона при 7-м порядке $g^{(j)}(x,t)$и $g^{(j)*}(-x,t)$, в 8-м порядке по $f(x,t)$и$f^*(-x,t)$и в 6-м порядке по $s^{(1)}(-x,t)$и$s^{(2)}(-x,t)$ [7]. Подставляя эти формы в (4), мы получим следующие выражения для односолитонного решения в явном виде:

$$q_j(x,t)=\frac{\alpha_1^{(j)}e^{\xi_1^{(j)}}+e^{\xi_1^{(1)}+\xi_1^{(2)}+\xi_1^{(3-j)}+\Delta_1^{(j)}}}{1+e^{\xi_1^{(1)}+\xi_1^{(1)}+\delta_1}+e^{\xi_1^{(2)}+\xi_1^{(2)}+\delta_2}+e^{\xi_1^{(1)}+\xi_1^{(1)}+\xi_1^{(2)}+\xi_1^{(2)}+\delta_3}}, \tag{10a}$$

$$q_j^*(-x,t)=\frac{\beta_1^{(j)}e^{\xi_1^{(j)}}+e^{\xi_1^{(1)}+\xi_1^{(2)}+\xi_1^{(3-j)}+\gamma_1^{(j)}}}{1+e^{\xi_1^{(1)}+\xi_1^{(1)}+\delta_1}+e^{\xi_1^{(2)}+\xi_1^{(2)}+\delta_2}+e^{\xi_1^{(1)}+\xi_1^{(1)}+\xi_1^{(2)}+\xi_1^{(2)}+\delta_3}}. \tag{10b}$$

Следовательно, мы накладываем ограничение на волновые числа в показательных функциях в обеих модах, то есть волновые числа выбираются равными:

$$\bar{k}_1^{(1)}=\bar{k}_1^{(2)}=\bar{k}_1,\quad k_1^{(1)}=k_1^{(2)}=k_1. \tag{11}$$

Это ограничение заставляет экспоненциальные функции в $g_1^{(1)}(x,t)$ и $g_1^{(2)}(x,t)$быть одним и тем же. Аналогично, экспоненциальные функции в $g_1^{(1)*}(-x,t)$и$g_1^{(2)*}(-x,t)$ одинаковы. Это ограничение позволяет нам исследовать вырожденные солитоны в формуле (2). Как мы покажем ниже, эти вырожденные солитонные решения обладают интересными свойствами. Налагая указанное выше ограничение на волновые числа (11), мы имеем следующие выражения для функций $g_1^{(j)}(x,t)$ и$g_1^{(j)*}(-x,t)$:

$$g_1^{(j)}(x,t)=\alpha_1^{(j)}e^{\bar{\xi}_1},\quad \bar{\xi}_1=i\bar{k}_1x-i\bar{k}_1^2t, \tag{11a}$$

$$g_1^{(j)*}(-x,t)=\beta_1^{(j)}e^{\xi_1},\quad \xi_1=ik_1x+ik_1^2t,\quad j=1{,}2. \tag{11b}$$

Теперь моды отличаются друг от друга только своими амплитудами.Вышеупомянутое ограничение на волновые числа усекает разложение в ряд (7a) - (7c) в 3-м порядке по $g_1^{(j)}(x,t)$ и$g_1^{(j)*}(-x,t)$, в 4-м порядке порядок по $f(x,t)$и$f^*(-x,t)$и $s^{(1)}(-x,t)$и$s^{(2)}(-x,t)$.Следовательно, решая систему результирующих линейных дифференциальных уравнений в частных производных, которые получаются из билинейных уравнений, используя выражения (11a) - (11b), находим:

$$g_3^{(j)}(x,t) = e^{\xi_1+2\bar{\xi}_1+\Delta_1^{(j)}}, \qquad g_3^{(j)*}(-x,t) = e^{2\xi_1+\bar{\xi}_1+\gamma_1^{(j)}},\ e^{\Delta_1^{(j)}} = \frac{\alpha_1^{(j)}\Gamma_{11}}{k_{11}}, \tag{12a}$$

$$f_2(x,t) = f_2^*(-x,t) = e^{\xi_1+\bar{\xi}_1+\delta_1},\ e^{\delta_1} = -2\frac{\Gamma_{11}}{k_{11}}, \quad e^{\gamma_1^{(j)}} = -\frac{\beta_1^{(j)}\Gamma_{11}}{k_{11}}, \tag{12b}$$

$$f_4(x,t) = f_4^*(-x,t) = e^{2(\xi_1+\bar{\xi}_1)+R}, \qquad e^R = \frac{\Gamma_{11}^2}{k_{11}^2}, \quad j = 1,2. \tag{12c}$$

В результате, вспомогательная функция выглядит следующим образом:

$$s_2^{(1)}(-x,t) = s_2^{(2)}(-x,t) = \Gamma_{11}e^{\xi_1+\bar{\xi}_1}. \tag{13}$$

Здесь $k_{11} = (k_1 + \bar{k}_1)^2$ и$\Gamma_{11} = \left(\alpha_1^{(1)}\beta_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)}\beta_1^{(2)}\right)$.

Можно проверить, что вспомогательные функции $s_4^{(1)}(-x,t)$и$s_4^{(2)}(-x,t)$становятся равными нулю в порядке ϵ^4.

Подставляя набор выражений (12) и (13) в (4), получаем следующее вырожденное солитонное решение:

$$q_j(x,t) = \frac{\alpha_1^{(j)}e^{\bar{\xi}_1}+e^{\xi_1+2\bar{\xi}_1+\Delta_{j1}}}{1+e^{\xi_1+\bar{\xi}_1+\delta_1}+e^{2(\xi_1+\bar{\xi}_1)+R}} = \frac{\alpha_1^{(j)}e^{\bar{\xi}_1}}{1+e^{\xi_1+\bar{\xi}_1+\Delta}}, \qquad e^{\Delta} = -\frac{\Gamma_{11}}{k_{11}} \tag{14a}$$

$$q_j^*(-x,t) = \frac{\beta_1^{(j)}e^{\xi_1}+e^{2\xi_1+\bar{\xi}_1+\gamma_{j1}}}{1+e^{\xi_1+\bar{\xi}_1+\delta_1}+e^{2(\xi_1+\bar{\xi}_1)+R}} = \frac{\beta_1^{(j)}e^{\xi_1}}{1+e^{\xi_1+\bar{\xi}_1+\Delta}}. \tag{14b}$$

Здесь $k_1 = 1+i,\ \bar{k}_1 = -1{,}4+i, \alpha_1^{(1)} = 1+i, \alpha_1^{(2)} = 1{,}5+i, \beta_1^{(1)} = 1-i$и$\beta_1^{(2)} = 1-i$.

Заключение

В данной работе нами построены более общие одно- и двухсолитонные решения для нелокального уравнения Манакова с помощью нестандартной процедуры билинеаризации. Обсуждены особенности полученных вырожденных солитонных решений.

Список использованных источников

1. Suchkov SV, Sukhorukov AA, Huang J, Dmitriev SV, Lee C, Kivshar YS, Nonlinear switching and solitons in PT -symmetric photonic systems, Laser Photonics Rev., 10 177 (2016).

2. Konotop VV, Yang J, Zezyulin DA, Nonlinear waves in PT -symmetric systems, Rev. of Mod. Phys., 88, 035002 (2016).

3. Ablowitz MJ, Musslimani ZH, Integrable nonlocal nonlinear Schro¨dinger equation, Phys. Rev. Lett., 110, 064105 (2013).

4. Ablowitz MJ, Musslimani ZH, Inverse scattering transform for the integrable nonlocal nonlinear Schro¨dinger equation, Nonlinearity, 29, 915 (2016).

5. Sarma AK, Miri M A , Musslimani ZH, Christodoulides DN, Continuous and discrete Schro¨dinger systems with parity-time-symmetric nonlinearities, Phys. Rev. E, 89, 052918 (2014).

6. Huang X, Ling L, Soliton solutions for the nonlocal nonlinear Schro¨dinger equation, Eur. Phys. J. Plus, 131, 148 (2016).

7. Wen X Y, Yan Z, Yang Y, Dynamics of higher-order rational solitons for the nonlocal nonlinear Schro¨dinger equation with the self-induced parity-time-symmetric potential, Chaos, 26, 063123 (2016).